UTFSM

Tarea 07, MAT-240

Entregar Miercoles 24 de Octubre de 2012

Considere el sistema conservativo $\ddot{x} = F(x)$, $x \geq 0$. Equivalentemente el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= F(x) \end{cases}$$

i) Demostrar que la energía total, definida por $E = T + U$, es una primera integral del sistema, donde $T(v) = \dfrac{v^2}{2}$ es la energía cinética y $U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(\xi)d\xi$ es la energía potencial.

ii) Demostrar que todos los puntos de equilibrio del sistema están sobre el eje x

iii) Demostrar que todas las órbitas periódicas del sistema, intersectan el eje x en dos puntos.

iv) Demostrar que si $U(x_1) = U(x_2) = c > 0$, $U(x) < c$ para $x_1 < x < x_2$. Entonces el sistema tiene una órbita periódica pasando por los puntos $(x_1, 0), (x_2, 0)$.

Indicación: Una órbita que pasa por $(x_0, 0)$ esta dada por $\dfrac{v^2}{2} + V(x) = E$, donde E es su energí total. Use la ecuación $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{F(x)}{v}$ para concluir que la órbita vuelve a intersectar el eje x en el punto $(x_2, 0)$. Use entonces iii).

v) Suponga que $F(x) \neq 0$ para $0 < |x - x_0| < a$. Demostrar que el sistema tiene un centro o una silla en $(x_0, 0)$ si $U(x_0)$ es un mínimo o un máximo relativo.

Indicación: Ver si es necesario el texto guia “ Lecciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Jorge Sotomayor “. Ejercicio 7 página 237.