LÍNEAS DE FASES

E. SÁEZ

Sea el dominio $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y la función $F : \Omega \to \mathbb{R}$.

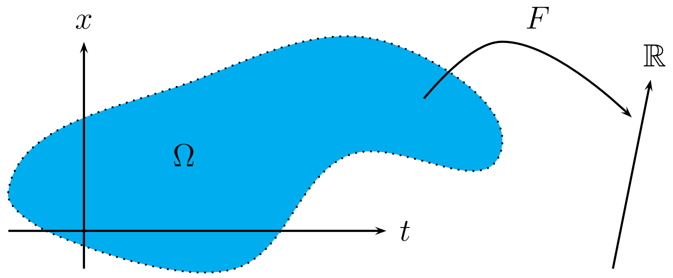


Fig. 1

Una expresión de la forma

(1) $$\frac{dx}{dt} = F(t,x) \quad , \quad \text{o bien,} \quad \dot{x} = F(t,x)$$

se llama Ecuación Diferencial Ordinaria (E.D.O.) de Primer Orden definida en Ω.

Ejemplos: $\dfrac{dx}{dt} = t \operatorname{sen} x \quad , \quad \dot{x} = e^t(x^2 - 1)$

Observación: Si la función $F : \Omega \to \mathbb{R}$ es de la forma $F(t,x) \equiv F(x)$ en Ω, es decir, F es sólo función de la variable x, entonces (1) se reduce a una ecuación del tipo

(2) $$\dot{x} = F(x)$$

En estos casos se dice que (2) es Autónoma. En caso contrario (1) se dice No-autónoma.

Ejemplos de Ecuaciones Autónomas:

$\dot{x} = \operatorname{sen}(e^{x^2-1})$,

$\dfrac{dx}{dt} = x^3 - 3x^2 + \mu x$, donde, μ es un parámetro real

Definición Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$. Una curva en Ω, parametrizada por una función $\phi : I \to \mathbb{R}$, $t \to \phi(t)$, se llama una solución de (1) si y sólo si satisface, en el

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl
http://docencia.mat.utfsm.cl/ esaez/ .

intervalo I, la identidad siguiente:

$$\frac{d}{dt}(\phi(t)) \equiv F(t, \phi(t)) \tag{3}$$

Interpretación interesante:

Sea $(t_0, \phi(t_0))$ un punto arbitrario pero fijo de la gráfica de una solución ϕ. Por el Cálculo y la identidad anterior, el valor de la imagen $F(t_0, \phi(t_0))$ es la pendiente de la recta tangente a dicha curva solución por el punto $(t_0, \phi(t_0))$. Luego

$$x - x_0 \;=\; F(t_0, x_0)(t - t_0) \;, \quad \text{donde} \;, \; x_0 = \phi(t_0) \tag{4}$$

es la ecuación de la recta tangente a la curva solución en el punto $(t_0, \phi(t_0))$, es decir, cualquier curva solución por el punto considerado es TANGENTE a la recta (4) (ver Fig. 2).

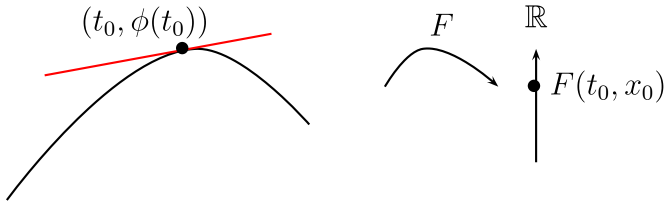


Fig. 2

Comentario: Las preguntas sobre existencia y unicidad de soluciones de (1), depende de las propiedades de la función F. Estos problemas se estudian en cursos más avanzados, ver por ejemplo [3]. En estas notas sólo nos limitamos a sus enunciados.

Teorema de Existencia

Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una función continua en el dominio Ω. Para todo punto $(t_0, x_o) \in \Omega$ existe una función $\phi : I \to \mathbb{R}$ definida en algún intervalo I, solución del problema de valor inicial llamado de Cauchy.

$$\frac{dx}{dt} \;=\; F(t, x) \quad , \quad \text{tal que} \;, \; \phi(t_0) = x_0$$

La Figura 3, ilustra el Teorema con dos soluciones ϕ_1, ϕ_2.

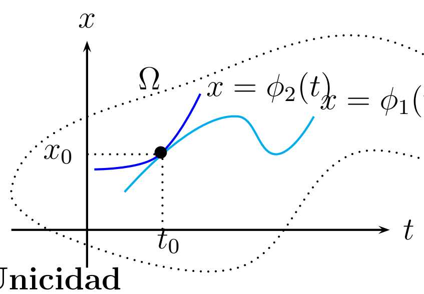


Fig. 3

Teorema de Unicidad

Sea $F : \Omega \to \mathbb{R}$, tal que; $F, \frac{\partial F}{\partial x}$ son funciones continuas en el dominio Ω. Para todo punto $(t_0, x_o) \in \Omega$ existe una única función $\phi : I \to \mathbb{R}$ definida en algún intervalo I de $\mathbb{R}$, solución única del problema de valor inicial de Cauchy.

Nótese que si en (2), F es un polinomio en la variable x, entonces la Ecuación Diferencial admite solución única $\forall(t,x) \in \mathbb{R}^2$. En lo que sigue, siempre supondremos existencia y unicidad de los problemas de Cauchy.

Pregunta 1: ¿Cómo describir la forma de las curvas en Ω, que son gráficas de soluciones de (2)?

Para responder esta pregunta recordemos la idea geométrica sobre traslaciones de gráficas respecto de un sistema de coordenadas. Si una variable de una función, por ejemplo x, se reemplaza por la traslación $x \to x - c$ donde c es una constante real, entonces la gráfica de la función se traslada en la dirección positiva (resp. negativa) del eje x si $c > 0$ (resp. $c < 0$). La Fig. 4 ilustra este comentario en el caso $c > 0$

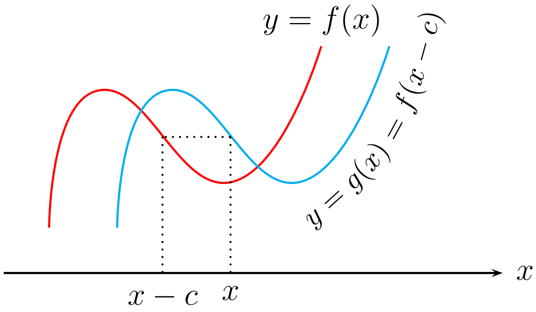


Fig. 4

Respuesta parcial de la Pregunta 1.

Sea una E.D.O. Autónoma,

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \tag{5}$$

Las Ecuaciones Diferenciales Autónomas son definidas en dominios de la forma $\mathbb{R} \times I$, donde $I = dom(F)$. Supongamos que $\xi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, $t \to \xi(t)$, es una solución de (5). Entonces cualquier traslación de la gráfica de ξ en la dirección del eje t, es una gráfica de una nueva solución de (5). En efecto, sea la nueva función trasladada

$$\eta : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R} \ , \ \text{tal que} \ , \ \eta(t) = \xi(t-c) \ , \ c \in \mathbb{R} \ \text{constante}$$

Entonces las siguientes identidades son inmediatas en el intervalo $I = \mathbb{R}$

$$\dot{\eta}(t) \equiv \dot{\xi}(t-c) \equiv F(\xi(t-c)) \equiv F(\eta(t))$$

Luego por (3), η también es solución de (5).

El argumento anterior nos dice que si conocemos el comportamiento cualitativo de una solución ξ_0 de (5), en realidad conocemos el comportamiento cualitativo de infinitas soluciones, pues basta considerar traslaciones de ξ_0 en la dirección positiva o negativa del eje t. Esto significa que si $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ es el dominio que cubren, en el plano tx, las traslaciones de ξ_0. Por el Teorema de Existencia y Unicidad en $\tilde{\Omega}$ no puede existir una curva que sea gráfica de una solución diferente a una traslación de ξ_0. Es decir en $\tilde{\Omega}$ se han encontrado TODAS las soluciones que la ecuación admite (ver Fig. 5).

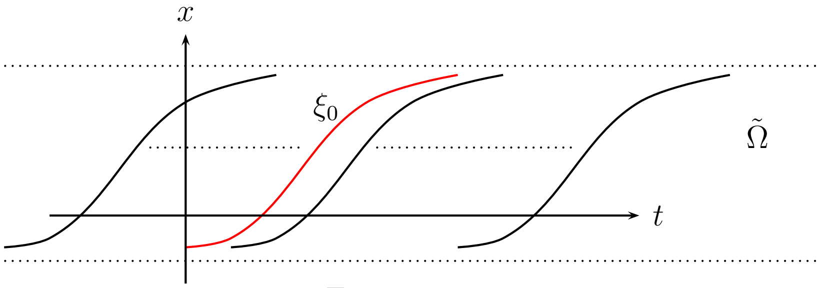


Fig. 5

Pregunta 2: ¿Cuántas soluciones diferentes de traslaciones admite (2)?

Examinemos con un ejemplo sencillo la pregunta anterior. Sea la E.D.O., $\dfrac{dx}{dt} = x$. Es inmediato que la función exponencial $x = e^t$ es una solución. Luego:

$$x = e^{t-c} = e^{-c}e^t = ke^t \quad , \quad \text{son soluciones} \quad , \; \forall\, k = e^{-c} > 0 \; , \; c \in \mathbb{R}$$

Las gráficas de las soluciones anteriores son curvas **CRECIENTES** (**pendientes positivas**) y cubren el semi plano superior $\Omega_1 = \{(t, x) \mid x > 0\}$. Por los argumentos desarrollados mas arriba, no puede existir en Ω_1 una curva solución diferente de traslaciones de $x = e^t$. Cualquier otra solución diferente de traslaciones de la exponencial sólo pueden existir en $\mathbb{R}^2 - \Omega_1$. Pero $x = -e^t$ también es una solución trivial, basta reemplazar en la ecuación. Entonces:

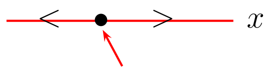
$$x = -e^{t-c} = -e^{-c}e^t = ke^t \quad , \quad \text{son soluciones} \quad , \; \forall\, k = -e^{-c} < 0 \; , \; c \in \mathbb{R}$$

y las gráficas de estas funciones son curvas **DECRECIENTES** (**pendientes negativas)** y cubren el semi plano inferior $\Omega_2 = \{(t, x) \mid x < 0\}$.

¿Existen más soluciones diferentes de las anteriores? Sólo pueden existir otras soluciones en la parte del plano

$$\Omega_3 \;=\; \mathbb{R}^2 - (\Omega_1 \cup \Omega_2) \;=\; \{(t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Pero Ω_3 es el eje t en el plano xt de ecuación $x = 0$. Es inmediato que $x = 0$ es otra solución trivial de la ecuación que tiene la particularidad de ser **Constante** (**pendiente cero**) . En resumen, la ecuación planteada tiene sólo **TRES** soluciones esencialmente diferentes en el sentido que sólo admite tres tipos de curvas soluciones: Crecientes, Decrecientes y Constantes. Este resumen de comportamientos cualitativos se puede ilustrar geométricamente definiendo una línea *ad hoc* llamada Línea de Fases como indica la Fig. 6

comportamientos decrecientes  comportamientos crecientes

solución constante

Fig. 6

Observación. Si x_0 es una raíz de la ecuación $F(x) = 0$, es decir, $F(x_0) = 0$, entonces $x = x_0$ es la ecuación de una recta en el plano tx, que es una solución **constante** de (2) pues se satisface:

$$\frac{d}{dt}(x_0) \equiv F(x_0) \equiv 0 \ \ , \ \ \text{ya que, } x_0 \ \text{ es una constante.}$$

Definición. Sea x_0 una raíz de la ecuación $F(x) = 0$, entonces diremos que x_0 es una SINGULARIDAD, o bien, un punto de EQUILIBRIO de la línea de fases de la ecuación (2).

Observación Importante. La Línea de Fases se puede obtener directamente de la ecuación (2), "sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación", ¿Cómo? Sabemos que $F(x)$ son las pendientes de las curvas soluciones de (2), entonces basta observar la gráfica de la función F pues los valores positivos, negativos y raíces de $F(x)$ determinan las soluciones crecientes, decrecientes y singularidades, respectivamente.

Ejemplo: Supongamos que la gráfica de la función F en la ecuación (2) es como indica la Fig. 7. La Línea de Fases queda determinada por los valores de las imágenes de F y es como muestra geométricamente la parte inferior de la Fig. 7.

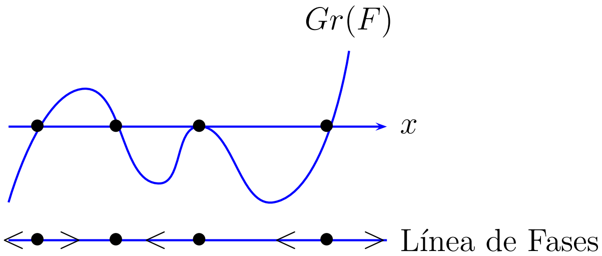
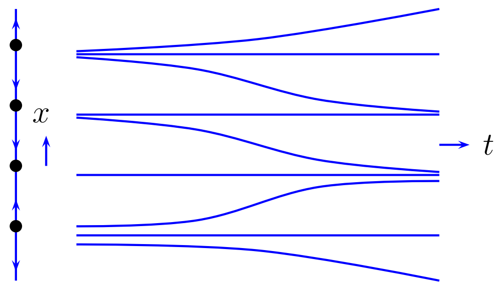


Fig. 7

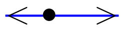
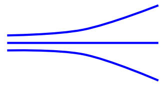
Interpretanto la Línea de Fases se tiene en forma inmediata el comportamiento cualitativo de los tipos de soluciones que admite (2) pues el sentido de las flechas corresponden a las soluciones monótonas como se muestra en la Fig. 8.

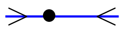
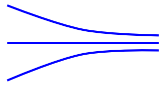


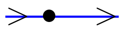
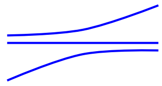
Línea de Fases y comportamientos Cualitativos

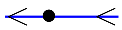
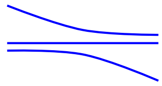
Fig. 8

Observación. Dependiendo del comportamiento local de las soluciones de la ecuación alrededor de una singularidad aislada en la Línea de Fases, se distinguen los siguientes tipos de singularidades:

1)  , repulsor (fuente), 

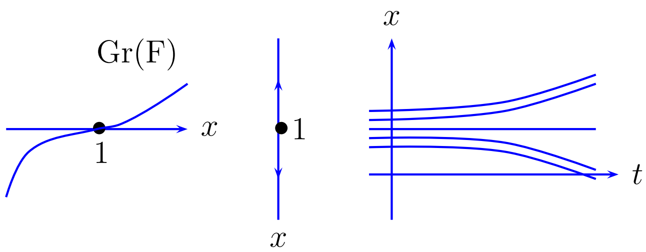
2)  , atractor (pozo), 

3)  , atractor-repulsor, 

4)  , repulsor-atractor, 

Ejemplo. Describir cualitativamente los tipos de soluciones que admite la E.D.O., $\dot{x} = (x-1)^3 e^{\cos(x^4-1)}$.

Solución: Es inmediato que $x = 1$ es la única singularidad (aislada) de la E.D.O. Como $e^{\cos(x^4-1)} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, la gráfica de $F(x) = (x-1)^3 e^{(\cos(x^4-1)}$, la Línea de Fases y los tipos de soluciones de la E.D.O. son como ilustra la Fig. 9, respectivamente.



, Pto de eq. repulsor

Fig. 9

La ecuación del ejercicio anterior, es muy difícil de integrar bajo el punto de vista del Cálculo. En consecuencia es difícil conocer explícitamente las ecuaciones de las soluciones que indica la Fig. 9, sin embargo, la Línea de Fases permite dar una descripción cualitativa del tipo de soluciones y punto de equilibrio.

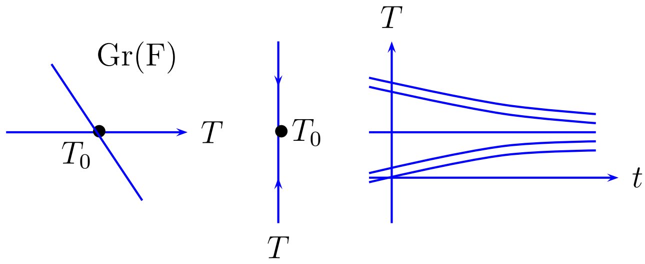
Ejemplo. Estudiemos el modelo de Newton, sobre la variación de temperatura que tienen los cuerpos. "*La temperatura de un cuerpo, en cada instante, cambia con una rapidez proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo con la temperatura del medio ambiente, la cual se supone constante*".

Sea $T = T(t)$ la temperatura de un cuerpo en el instante t y T_0 la temperatura ambiente, que se supone constante. La Ecuación Diferencial que modela el Principio de Newton es de la forma

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_0)$$

donde $\lambda > 0$ es la constante de proporcionalidad.

La gráfica de $F(T) = -\lambda(T - T_0)$, la Línea de Fases y los tipos de soluciones de la E.D.O. son como ilustra la Fig. 10, respectivamente.



, T_0 pto de eq. atractor

Fig. 10

Nótese que si un cuerpo tiene en el instante cero una temperatura mayor (resp. menor) que T_0, es decir, $T(0) > T_0$ (resp. $T(0) < T_0$), entonces como la temperatura ambiente T_0, es el único punto de equilibrio y es un atractor, la temperatura de ambos cuerpos tienden a T_0 a medida que transcurre el tiempo, o bien, para ambos cuerpos y cualquier otro cuerpo, $\lim_{t\to\infty} T(t) = T_0$

Ejemplo. Supongamos el siguiente modelo sencillo de epidemias. "*Existe una población de N individuos que tiene en cada instante t, $y(t)$ individuos infectados y $x(t)$ individuos sanos pero susceptibles de infectarse. La suma de los individuos infectados más los individuos sanos es el total de la población, la cual se supone constante. El número de individuos infectadas cambia con una rapidez proporcional al número de individuos infectadas y al número de individuos sanos*". ¿Qué ocurre con la epidemia a medida que transcurre el tiempo?.

La Ecuación Diferencial que modela el comportamiento de los individuos infectados, de acuerdo al enunciado anterior está dada por;

$$\frac{d}{dt}(y(t)) = \lambda x(t)y(t)$$

donde $\lambda > 0$ es la constante de proporcionalidad.

Como $x(t) + y(t) = N$, la E.D. anterior que modela el comportamiento de los individuos infectados se reduce a la expresión:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(N - y)y$$

La gráfica de $F(y) = \lambda(N - y)y$, la Línea de Fases y los tipos de soluciones de la E.D.O. son como ilustra la Fig. 11, respectivamente.

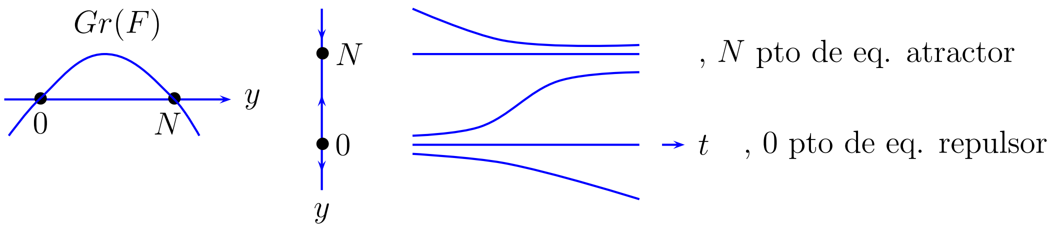


Fig. 11

Comentario: Nótese que si en un instante t_0, aparece un caso de un individuo infectado, es decir, se presenta la condición inicial $y(t_0) = 1$, entonces si $y = y(t)$ es la curva solución que satisface la condición inicial, según el modelo $\lim_{t\to\infty} y(t) = N$, pues N es un punto de equilibrio atractor. El modelo predice que de no tomar medidas especiales para controlar la epidemia, la totalidad de la población se contagia a medida que transcurre el tiempo.

Definición. *Dos Ecuaciones Diferenciales Autónomas del tipo (2), se dicen cualitativamente equivalentes si y sólo si tienen la misma Línea de Fases, en el sentido del mismo número de puntos singulares, de la misma naturaleza y distribuidos en el mismo orden.*

Ejemplo: Las E.D. $\dot{x} = x$, $\dot{x} = (x-1)^3 e^{\cos(x^4-1)}$. son equivalentes pues sólo tienen un único punto atractor en sus respectivas Líneas de Fases.

Comentario: Existen fenómenos de la naturaleza que bajo el punto de vista de la definición anterior, matemáticamente son equivalentes. Por ejemplo, el modelo de Newton de enfriamiento de los cuerpos descrito anteriormente es equivalente a la Ley de desintegración radioactiva *"La tasa de desintegración de una sustancia radioactiva es proporcional, en cualquier instante a la cantidad de sustancia presente"*. En efecto si $A = A(t)$ es la masa de una sustancia radioactiva en el instante t, entonces la E.D. que modela el fenómeno está dada por: $\dot{A} = -\lambda A$, $\lambda > 0$. La gráfica de $F(A) = -\lambda A$, la Línea de Fases y los tipos de soluciones de la E.D.O. son como ilustra la Fig. 12, respectivamente.

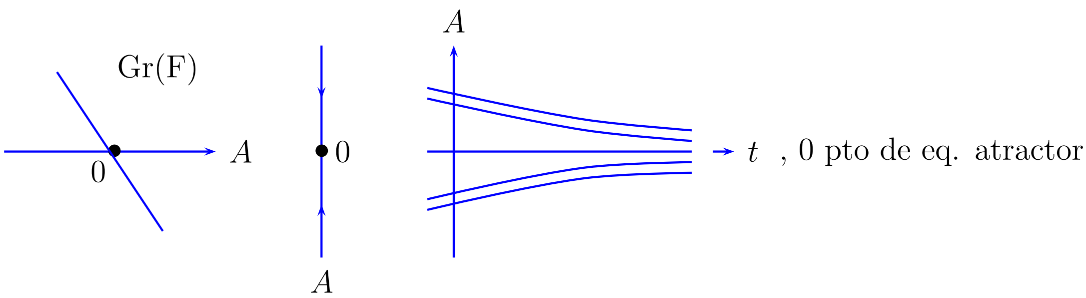


Fig. 12

Los puntos $T = T_0$ y $A = 0$ son los únicos puntos de equilibrio atractores en las respectivas Líneas de Fases.

Ejercicio: Clasificar las Líneas de Fases no-equivalentes de la E.D. $\dot{x} = \lambda + x^2$, donde λ es un parámetro real.

Solución: Sea $F_\lambda(x) = \lambda + x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Con el objeto de estudiar como cambian las distintas Líneas de Fases, dependiendo del parámetro λ, consideremos la gráfica de la ecuación $F_\lambda(x) = 0$ en el plano λx (ver Fig. 13). Si las rectas verticales muestran las Líneas de Fases, entonces las intersecciones entre la parábola $\lambda = -x^2$ y las rectas verticales son los puntos de equilibrio de las Líneas de Fases. Es claro que si $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, o bien $\lambda > 0$, se tiene respectivamente: dos, cero , o bien ninguna intersección. Sólo existen tres Líneas de Fases no-equivalentes, en efecto, si $\lambda < 0$ existen dos puntos de equilibrio atractor y repulsor resp., si $\lambda = 0$ sólo el origen es un punto de equilibrio atractor-repulsor y si $\lambda > 0$ no existen puntos de equilibrio (ver Fig. 13)

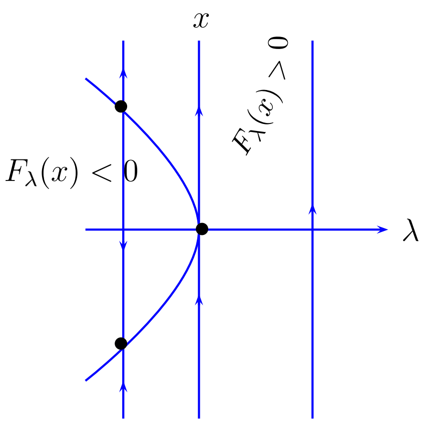


Fig. 13

Ejercicio 1. *Una cierta ley de radiación, establece que la razón de cambio de la temperatura de un cuerpo a $T(t)$ grados, que se encuentra en un medio de temperatura constante, de $M = 70 \ \ {}^0C$, es proporcional a $M^2 - T^2(t)$ donde la constante de proporcionalidad es positiva:*

i) *Encuentre la Línea de Fases*
ii) *Si $T(0) = 100 \ \ {}^0C$, determinar:*

$$\lim_{t\to\infty} T(t)$$

Ejercicio 2. *Describir cualitativamente los tipos de soluciones de las E.D.*

a) $\dot{x} = \operatorname{sen} x^2$
b) $\dot{x} = \operatorname{sen}^2 x$

Ejercicio 3. *Describir las Líneas de Fases, no equivalentes, de la ecuación diferencial*

$$\dot{x} \;=\; (x-1)(x+\lambda)e^{2\cos x}\;, \qquad si\;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4. *Sea la Ecuación Diferencial,*

$$\frac{dx}{dt} \;=\; (x+1+\lambda)(x-1)e^{x-1}, \;\; \textit{donde el parámetro} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

i) *¿Cuáles son las Líneas de Fases, no equivalentes, que admite la Ecuación Diferencial?*
ii) *Describa en un gráfico, cualitativamente, las soluciones de la Ecuación Diferencial correspondientes a las Líneas de Fases encontradas en a)*

Ejercicio 5. *Supongamos que $A(t)$ es la cantidad de material que memoriza un estudiante en un tiempo t y M representa la cantidad de material total que es necesario memorizar. Si la rapidez de memorización de un cierto estudiante, es la diferencia entre un múltiplo de la cantidad de material que le queda por memorizar, y un múltiplo de lo memorizado.*

i) *Describa el modelo matemático que representa la capacidad de memorización.*
ii) *¿Cómo es la Línea de Fases del modelo obtenido en i)? (se entiende que todas las constantes son positivas)*
iii) *Si $A(0) = 0$. ¿Un estudiante llega a lo largo del tiempo a memorizar todo el material?*
iv) *Si el múltiplo de lo memorizado por Juan es menor que el de Diego. ¿Quién tiene mejor memoria?*

Ejercicio 6. *En un envase de reacción se encuentran las substancias A y B. La substancia A por reacciones químicas se convierte en la substancia B. La rapidez de conversión, en cada instante, es proporcional al producto de las masas de ambos substancias. Según las leyes de la Física , la suma de las masas M de ambas substancias, es invariante en el proceso de conversión.*

a) *¿Cuáles son las ecuaciones diferenciales que modela los cambios de la masa $x(t)$ de la substancia A y los cambios de la masa $y(t)$ de la substancia B ?.*
b) *¿Cuáles son los puntos de equilibrio de ambas E.D.O. ?*
c) *Si el sistema no está en un punto de equilibrio al inicio de un experimento. ¿Qué se puede decir sobre los comportamientos de $x(t)$, $y(t)$ cuando $t \to \infty$?*
d) *¿ Son equivalentes las dos E.D.O de a) ?.*

Ejercicio 7. *Sea $p = p(t)$ la población de una bacteria en cada instante (medida en millones). La rapidez de cambio de la población (en un modelo sencillo) en cada momento está dada por: una tasa de* **natalidad** *que es proporcional a la población del instante, una segunda tasa de* **mortalidad** *natural que también es proporcional a* *la población del instante y una tercera tasa de* **mortalidad** *debida a* **competencias intraespecies** *que es proporcional al término* $\frac{1}{2}p(p-1)$.

i) *Si* $k_1, k_2, k_3 > 0$ *son las respectivas tasas de proporcionalidad en el orden en que aparecen en el enunciado.* **¿ Cuál es la Ecuación Diferencial** *que modela la población de las Bacterias ?*
ii) *Si las respectivas tasas en i) son:* $k_1 = 5, k_2 = 2, k_3 = 1$. **¿ Cuál es la línea de fases** *asociada a la E.D.O. ?.*
iii) *Si en el instante inicial* $p(0) > 0$ *¿ Existe, a largo plazo, la* **posibilidad que la población de Bacterias se extinga ?**.
iv) *En general, si las constantes de proporcionalidad satisfacen* $k_1 - k_2 + \frac{1}{2}k_3 < 0$ **¿ Qué puede afirmar sobre la supervivencia de la población de Bacterias ?.**

Ejercicio 8. *Sea* $p = p(t)$ *la población de una cierta ciudad en cada instante* t *(medida en millones de personas). La razón de cambio de la población, principalmente se debe a tres causales: a) Una tasa de natalidad que es proporcional, con constante de proporcionalidad* $k_1 > 0$*, a la población del momento; b) Una tasa de mortalidad natural que es proporcional, con constante de proporcionalidad* $k_2 > 0$*, a la población del momento,* $k_2 < k_1$*; c) Una tasa de mortalidad no-natural (por ejemplo: debida a accidentes de tránsito, accidentes en el trabajo, períodos de guerra, etc) que es proporcional, con constante de proporcionalidad* $k_3 > 0$*, al término* $p(p-1)^2$*, (*$k_3 < k_2$*).*

i) *Establezca la Ecuación Diferencial que modela el tamaño de la población .*
ii) *Si las respectivas tasas se estiman en* $k_1 = 6, k_2 = 5, k_3 = 4$*. Describa la Línea de Fases de la E.D.O.*
iii) *Si en el instante inicial* $p(0) < \frac{1}{2}$*. ¿ Existe a largo plazo, la posibilidad que la población se extinga ?.*
iv) *¿ Bajo que condiciones iniciales se puede afirmar la supervivencia de la respectiva ciudad a través de los tiempos ?.*

Ejercicio 9. *Suponga un modelo sencillo de una población de animales* $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{t})$*, donde* $\mathbf{t}$ *es el tiempo, que tiene igual número de machos y hembras. Los nacimientos de la población, en cada instante, son proporcionales con tasa* $k > 0$ *al número de machos y hembras . La mortalidad de la población es proporcional con tasa* $\delta > 0$ *a la población en cada instante .*

i) *¿ Cuál es la* **Ecuación Diferencial** *que modela la rapidez de cambio de la población ?.*
ii) *Si* $a = \dfrac{\delta}{k}$. *¿***Qué puede afirmar si** $\mathbf{P(0) < 4a}$ *?*
iii) *¿* **Qué puede afirmar si** $\mathbf{P(0) > 4a}$ *?*

Ejercicio 10. *Un modelo sencillo sobre la variación de la población de peces en un lago de grandes dimensiones a lo largo del tiempo,* $x = x(t)$*, medida en toneladas,* *depende esencialmente de tres factores:*

i)	*Tasa de nacimiento en el instante t dada por:*	$2x(t)$
ii)	*Tasa de mortalidad en el instante t dada por:*	$(1 + \frac{1}{12}x(t))x(t)$
iii)	*Tasa de captura constante dada por el parámetro*	K

Preguntas:

(i) *Escribir la Ecuación Diferencial Ordinaria del modelo.*
(ii) *Si la captura* $K = \dfrac{5}{3}$*. Encontrar los puntos de equilibrio del modelo.*
(iii) *¿ Como es la Línea de Fases ?*
(iv) *Describir cualitativamente el tipo de soluciones que admite la E.D.O.*
(v) *Si* $K = 4$*. ¿ Qué puede afirmar a futuro sobre la población de peces ?.*

Agradecimientos: Por su contribución a revisar la presentación de estos apuntes agradezco a la señora Amalia Becerra, Secretaria del Departamento de Matemática.

References

[1] "Ordinary differential equations' '. D.K.Arrowsmith & C.M.Place. Chapman and Hall . London, New York. 1982
[2] "Ecuaciones diferenciales". P.Blanchard, R.L.Devaney and G.R.Hall. Boston University.International Thomson Editores. 1998
[3] "Liçóes de equaçóes diferenciais ordinárias". Jorge Sotomayor. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. Proyecto Euclides. 1979.