INTEGRAL Y TRANSFORMADA DE FOURIER
NOCIONES BÁSICAS

E. SÁEZ

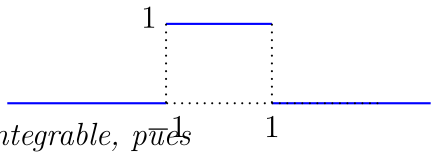
Pregunta ¿ Es posible conseguir una expresión, que represente equivalentemente a una función, no periódica y definida en el intervalo $(-\infty, \infty)$?.

Por la hipótesis de no periocidad de la función, una respuesta de una representación de tipo Fourier no es posible, pues la Series de Fourier tienen la propiedad de periocidad.

Definición 1. *Una función $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ se llama Absolutamente Integrable si y sólo si, el valor principal de Cauchy de la integral impropia,*
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty$ *(converge).*

Ejemplo 1. *Sea la función $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, tal que:*

$$f(\xi) = \begin{cases} 1 & si \quad |\xi| \leq 1 \\ 0 & si \quad |\xi| > 1 \end{cases} ,$$



Entonces, la función es Absolutamente Integrable, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi = \int_{-1}^{1} d\xi = 2 < \infty$$

Nótese que una función periódica $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, No es Absolutamente Integrable. En particular las funciones trigonométricas básicas, Seno y Coseno , no son Absolutamente Integrables.

Integral de Fourier

Sea $PC[-p, p]$, el Espacio Euclidiano de las funciones seccionalmente continuas definidas en el intervalo $[-p, p], p > 0$. Veremos que este espacio es muy adecuado para comprender la idea de la Integral y Transformada de Fourier con la ayuda del Algebra Lineal.

Supongamos una función $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, seccionalmente continua en cada subintervalo cerrado $[-p, p], p > 0$, equivalentemente $\forall p > 0,\ f \in PC[-p, p]$. Además

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

suponemos que la función es Absolutamente Integrable en $(-\infty, \infty)$. Entonces se sabe que en cada intervalo cerrado $[-p, p], p > 0$ la función admite una representación en serie de Fuorier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \Big) \tag{1}$$

La convergencia es en el sentido del espacio Euclidiano, es decir, $||f(x) - S_k(x)|| \to 0$ si $k \to \infty$, donde $S_k(x)$ es la k-ésima suma parcial de la serie de Fourier (1). Convergencia llamada en Norma (convergencia en media).

Se sabe que los coeficientes de la serie (1) están dados por los coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p} dx, \ n \in \mathbb{N}_0 \ \ ; \ \ b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} dx, \ n \in \mathbb{N}$$

Con el objeto de pasar (1), a la situación límite cuando $p \to \infty$, busquemos para este cálculo una expresión más adecuada que (1). Reemplazando los coeficientes de Fourier en la serie de Fourier (1):

$$\begin{aligned} f(x) \ &= \ \frac{1}{2p} \textstyle\int_{-p}^{p} f(\xi) d\xi + \frac{1}{p} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\Big[\int_{-p}^{p} f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{p} d\xi \Big] \cos \frac{n\pi x}{p} \\ & \quad + \Big[\textstyle\int_{-p}^{p} f(\xi) \operatorname{sen} \frac{n\pi \xi}{p} d\xi \Big] \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \Big) \end{aligned}$$

o bien equivalentemente, $f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(\xi) d\xi + \frac{1}{p} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_{-p}^{p} \cos \frac{n\pi}{p} (\xi - x) f(\xi) d\xi$

La expresión anterior también se puede escribir en la forma:

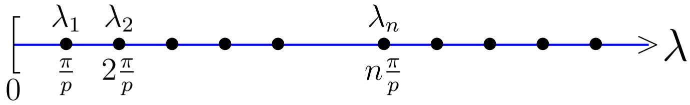
$$f(x) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{p} \int_{-p}^{p} \cos \frac{n\pi}{p} (\xi - x) f(\xi) d\xi \tag{2}$$

El primer sumando del segundo miembro de (2), claramente tiene límite cero cuando $p \to \infty$, pues $\left| \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} f(\xi) d\xi \right| \leq \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} \left| f(\xi) \right| d\xi \to 0$, ya que f es Absolutamente Integrable.

Para demostrar la convergencia del segundo sumando, del segundo miembro de (2), consideremos la definición misma de la Integral de Riemann.

$$\text{Si } \lambda_n = \frac{n\pi}{p} \ , \ n \in \mathbb{N}_0, \ \text{entonces} \ \ \Delta\lambda_n = \frac{n\pi}{p} - \frac{(n-1)\pi}{p} = \frac{\pi}{p} \ \ , \ n \in \mathbb{N}$$

Sea $\mathcal{P}_p = \{0, \frac{\pi}{p}, 2\frac{\pi}{p}, ..., n\frac{\pi}{p}, ...\}$ una partición aritmética del intervalo $[0, \infty]$,

Geométricamente, 

La Norma de la partición es $\mu(\mathcal{P}_p) = \dfrac{\pi}{p}$.
Para cada $p > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, sea la función: $F(\lambda_n) = \int_{-p}^{p} f(\xi)\cos\lambda_n(\xi - x)d\xi$. La función es bien definida ya que existe y es acotada pues $\Big|F(\lambda_n)\Big| \leq \int_{-p}^{p} |f(\xi)|d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|d\xi$ y por hipótesis f es Absolutamente Integrable en $(-\infty, \infty)$.

$$\text{Sea la suma de Riemann} \;\;,\;\; S(F, \mathcal{P}_p) = \sum_{n=1}^{\infty} F(\lambda_n)\Delta\lambda_n$$

$$\text{Pero} \;,\; p \to \infty \Longrightarrow \Delta\lambda_n \to 0 \;\;,\;\; \mu(\mathcal{P}_p) \to 0 \;\;,\;\; \text{y} \;\;,\;\; \lim_{p\to\infty} S(F, \mathcal{P}_p) = \int_0^{\infty} F(\lambda)d\lambda$$

Entonces, si $p \to \infty$ la expresión (2) tiene límite:

(3)
$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \;=\; \dfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi d\lambda \;\;,\;\; x \in (-\infty, \infty) \\ \\ \text{INTEGRAL DE FOURIER} \end{array}}$$

Comentario 1. *La integral de Fourier, equivalentemente se puede escribir en forma similar a una Serie de Fourier. Con este objetivo, consideremos la identidad de la trigonometría:*

$\cos\lambda(\xi - x) \equiv \cos\lambda\xi\cos\lambda x + \operatorname{sen}\lambda\xi\operatorname{sen}\lambda x$. Introduciendo esta identidad en la Integral de Fourier (3) se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\Big(\cos\lambda\xi\cos\lambda x + \operatorname{sen}\lambda\xi\operatorname{sen}\lambda x\Big)d\xi d\lambda, \quad \text{o bien,} \\ f(x) &= \int_0^{\infty}\Big[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\cos\lambda x + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\lambda\xi d\xi\operatorname{sen}\lambda x\Big]d\lambda \end{aligned}$$

Si se definen los coeficientes, también llamados Coeficientes de Fourier:

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi \;,\;\; b_\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\lambda\xi d\xi \;\;,\;\; \lambda > 0$$

.

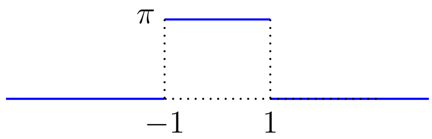
La Integral de Fourier se puede escribir, equivalentemente como:

(4)
$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) \;=\; \int_0^{\infty}\big[a_\lambda\cos\lambda x + b_\lambda\operatorname{sen}\lambda x\big]d\lambda \;,\;\; x \in (-\infty, \infty) \\ \\ \text{REPRESENTACIÓN EN INTEGRAL DE FOURIER} \end{array}}$$

La Representación de $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, con las hipótesis de la introducción en Integral de Fourier, es una generalización de las Series de Fourier para funciones definidas en $PC[-p, p], \; p > 0$.

Ejemplo 2. *¿ Cuál es la representación en Integral de Fourier de la función ?.*

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \pi & si \quad |x| \le 1 \\ 0 & si \quad |x| > 1 \end{cases} \quad ,$$

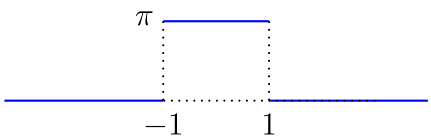


Respuesta 1. *Es claro que la función es, $\forall p \in \mathbb{R}$ seccionalmente continua en cada intervalo $[-p,p]$ y Absolutamente Integrable. Entonces admite una representaciń Integral de la forma,* $\;f(x) = \int_0^\infty \big[a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \operatorname{sen} \lambda x\big] d\lambda$, $\;x \in (-\infty, \infty)$.

Los Coeficientes de Fourier están dados por:

$$\begin{aligned} a_\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \pi \cos\lambda\xi d\xi = 2\frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda} \\ b_\lambda &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\lambda\xi d\xi = 0, \textit{pues el integrando en la variable}, \xi, \textit{es impar} \end{aligned}$$

Entonces, $f(x) = 2\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\cos\lambda x d\lambda$, $x \in \mathbb{R}$. *Geométricamente en el Espacio Euclidiano, es el vector,*



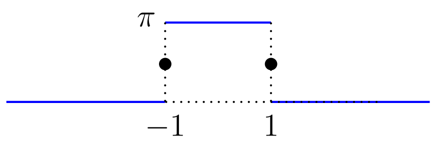
Comentario 2. *La igualdad entre la función y su representación en integral de Fourier en (4), no es en sentido puntual del Cálculo, en consecuencia para un $x \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo, no necesariamente la respectiva imágen de la función, coincide con el valor de la Integral en el punto. Análogamente al estudio de las Series de Fourier se tiene un Teorema de convergencia puntual para la Integral de Fourier. En textos más avanzados que estos apuntes se demuestra:*

Teorema 1. *Sea f una función, seccionalmente continua en todo intervalo finito, absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y con derivadas laterales en cada punto. Entonces, la Representación Integral de Fourier converge puntualmente*

$$\int_0^\infty \big[a_\lambda \cos\lambda x + b_\lambda \operatorname{sen}\lambda x\big] d\lambda = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \;,\; \forall x \in (-\infty, \infty).$$

Comentario 3. *Del teorema anterior es inmediato que en los puntos de continuidad de f, la Integral de Fourier coincide con la imágen de los puntos. En los puntos de discontinuidad (que son finitos), la discontinuidad es siempre de salto pues los límites laterales existen por hipótesis. En estos puntos la Integral de Fourier converge al valor medio del salto y no necesariamente coincide con la imágen de la función en el punto. En particular, para funciones continuas y las hipótesis restantes del Teorema anterior. La representación en Integral de Fourier coincide puntualmente* *con la función, equivalentemente, la representación en Integral de Fourier y la función son idénticas en* $\mathbb{R}$.

Ejemplo 3. *Del ejercicio 1, redefiniendo la función en* $x = -1$ *y* $x = 1$ *como* $\dfrac{\pi}{2}$ *, se tiene geométricamente que la gráfica de la función está dada por:*



En particular para $x = 0$*, la función es continua y la imágen es* π*. Entonces se tiene que el valor de la integral impropia:*

$$\pi = 2\int_0^\infty \frac{sen\lambda}{\lambda}d\lambda, \; o \; bien \;, \quad \int_0^\infty \frac{sen\lambda}{\lambda}d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

Nótese que para $x = 1, f(1) = 2\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\lambda}{\lambda}\cos\lambda d\lambda$ *, o bien ,* $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2\lambda}{\lambda}d\lambda$

Versión Compleja de la Integral de Fourier

El integrando de la Integral de Fourier (3), es una función **Par** en la variable λ. Por las propiedades de las funciones Pares, en el sentido del Valor Principal de Cauchy, se puede escribir equivalentemente

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi d\lambda \quad , \quad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Por las propiedades de las funciones Impares, en el sentido del Valor Principal de Cauchy, es inmediato para la integral en la variable λ

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}\lambda(\xi - x)d\xi d\lambda = 0$$

En consecuencia, multiplicando igualdad anterior por $\frac{-i}{2\pi}$

$$\tfrac{-i}{2\pi}\textstyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)\operatorname{sen}\lambda(\xi - x)d\xi d\lambda = 0 \tag{6}$$

donde i es la unidad imaginaria del sistema de números complejos

Sumando cero al segundo miembro de la fórmula (5), reemplazando el cero por la fórmula (6) y reagrupando las integrales impropias se obtiene:

$$f(x) = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty [\cos\lambda(\xi - x) - i\operatorname{sen}\lambda(\xi - x)]f(\xi)d\xi d\lambda$$

Por la identidad de Euler, $e^{i\theta} \equiv \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ con $\theta \in \mathbb{R}$, se puede escribir:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \;=\; \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi)e^{-i\lambda(\xi - x)}d\xi d\lambda \;\;,\;\; x \in \mathbb{R} \\[2ex] \qquad\qquad\text{VERSIÓN COMPLEJA DE LA INTEGRAL DE FOURIER} \end{array}} \tag{7}$$

TRANSFORMA COMPLEJA DE FOURIER

La Integral Compleja de Fourier se puede escribir equivalentemente

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(e^{i\lambda x}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi}_{\text{función de }\lambda}\Big)d\lambda \ \ , \quad x\in\mathbb{R} \tag{8}$$

La existencia de las integrales impropias en (8) permite definir la **Transformada de Fourier** de la función f, como la función en la variable λ .

$$\boxed{\mathcal{F}[f](\lambda):=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi \ = \ \hat{f}(\lambda)} \tag{9}$$

Nótese que introduciendo la función $\hat{f}$ en (8) se **recupera** la función f pues se tiene:

$$f(x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

Por lo anterior, se define la **Transformación Inversa de Fourier** por:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x):=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda} \tag{10}$$

Comentario 4. *Algunos autores para aumentar la simetria de las fórmulas en las definiciones de la Transformada de Fourier y su inversa, reparten el coeficiente de (7),* $\frac{1}{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ *en ambas integrales y definen:*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{F}[f](\lambda)&:=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi\\ \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)&:=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda\end{aligned}}$$

Expresiones conocidas con el nombre de **Formas Simétricas de la Transformada de Fourier y su Inversa**.

Ejemplo 4. *Por cálculo directo obtener:*

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\lambda) \ = ? \ \ , a>0$$

Solución: Es claro que la función $f(x)=e^{-a|x|}, a>0$ es absolutamente integrable, seccionalmente continua en **cada intervalo** de la forma $[-p,p]$, $p>0$ y con derivadas laterales en cada punto (ver Fig 1)

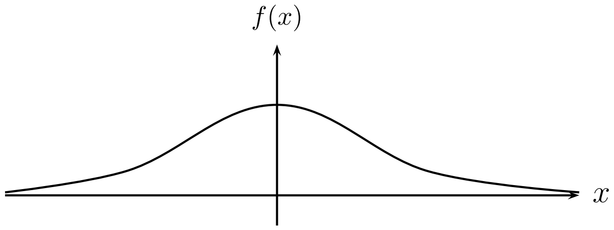


FIGURA 1

Usando directamente la definición (9) se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-a|x|}](\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|}e^{-i\lambda x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-a|x|}e^{-i\lambda x}dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{x(a-i\lambda)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(a+i\lambda)}dx = \left.\frac{e^{x(a-i\lambda)}}{a-i\lambda}\right|_{-\infty}^{0} - \left.\frac{e^{-x(a+i\lambda)}}{a-i\lambda}\right|_{0}^{\infty} \end{aligned}$$

Pero $e^{x(a-i\lambda)} \equiv e^{ax}(\cos\lambda x - i\operatorname{sen}\lambda x)$, entonces en el sentido de límite $||e^{x(a-i\lambda)}|| = e^{ax} \to 0$ si $x \to -\infty$ pues $a > 0$

Análogamente $||e^{x(a+i\lambda)}|| = e^{-ax} \to 0$ si $x \to \infty$.

$$\text{Luego , } \mathcal{F}[e^{-a|x|}](\lambda) = \frac{1}{a-i\lambda} - \frac{1}{a+i\lambda} = \frac{2a}{a^2+\lambda^2} \quad , \quad a > 0.$$

∎

Propiedades de la Transformada de Fourier

Suponiendo la convergencia de las integrales impropias involucradas, las propiedades básicas de la Transformada de Fourier son análogas a las correspondientes propiedades de la Transformada de Laplace.

Propiedad 1 (Linealidad)**.**

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{F}[f] + \beta\mathcal{F}[g] \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Demostración: Consecuencia inmediata de la propiedad de linealidad de la integral.

∎

Propiedad 2 (Primer Teorema de Traslación)**.**

$$\mathcal{F}[f(x)e^{i\lambda_0 x}](\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda - \lambda_0) \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[f(x)e^{i\lambda_0 x}](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda_0 x}e^{-i\lambda x}dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\lambda-\lambda_0)x}dx}_{\mathcal{F}[f](\lambda-\lambda_0)} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 5. *Si* $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ *, entonces por la identidad de Euler*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x)\cos ax](\lambda) &= \tfrac{1}{2}\Big(\mathcal{F}[f(x)e^{iax}](\lambda) + \mathcal{F}[f(x)e^{-iax}](\lambda)\Big) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\mathcal{F}[f](\lambda - a) + \mathcal{F}[f](\lambda + a)\Big) \end{aligned}$$

Análogamente, se deja como ejercicio al lector demostrar la fórmula:

$$\mathcal{F}[f(x)\,\mathrm{sen}\,ax] = -\frac{i}{2}\Big(\mathcal{F}[f](\lambda - a) - \mathcal{F}[f](\lambda + a)\Big)$$

Propiedad 3 (Segundo Teorema de Traslación)**.**

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\lambda) = e^{-i\lambda x_0}\mathcal{F}[f](\lambda) \quad , \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - x_0)e^{-i\lambda x}dx$$

Sea el cambio de coordenadas (variables), $x - x_0 = \xi$, entonces

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\lambda) = \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda(\xi + x_0)}d\xi = e^{-i\lambda x_0}\underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi}_{\mathcal{F}[f](\lambda)} \quad \blacksquare$$

Propiedad 4 (Cambio de Escala)**.**

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{\alpha}) \quad , \quad \alpha \in \mathcal{R} - \{0\}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)e^{-i\lambda x}dx$$

Sea el cambio de coordenadas (variables), $\alpha x = \xi$, entonces:

Si $\alpha > 0$, $\mathcal{F}[f(\alpha x)](\lambda) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{i\lambda\xi}{\alpha}}d\xi = \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{\alpha})$

Si $\alpha < 0$, $\mathcal{F}[f(\alpha)](\lambda) = \frac{1}{\alpha}\int_{\infty}^{-\infty} f(\xi)e^{-\frac{i\lambda\xi}{\alpha}}d\xi = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\frac{i\lambda\xi}{\alpha}}d\xi$
$= -\frac{1}{\alpha}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{\alpha})$

Luego , $\mathcal{F}[f(\alpha x)](\lambda) = \frac{1}{|\alpha|}\mathcal{F}[f](\frac{\lambda}{\alpha})$ $\blacksquare$

Propiedad 5 (Transformada de la Transformada)**.**

$$\mathcal{F}[\hat{f}](\lambda) = 2\pi f(-\lambda)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[f] = \hat{f} \Rightarrow f = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] \quad , \quad \text{es decir ,}$$

$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi \Rightarrow 2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi$, cambiando $x \to -\lambda$

$$2\pi f(-\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)e^{-i\xi\lambda}d\xi \quad , \quad \text{es decir,} \quad \mathcal{F}[\hat{f}](\lambda) = 2\pi f(-\lambda) \; \blacksquare$$

Comentario 5. *Nótese que la fórmula anterior permite calcular una transformada inversa, calculando la transformada de la transformada , luego para recuperar la función f, basta cambiar $\lambda \to -x$ y luego dividir por 2π*

Ejemplo 6. *En el ejemplo (4) se tiene,* $\mathcal{F}[e^{-a|x|}](\lambda) = \dfrac{2a}{a^2+\lambda^2}$, $a > 0$.

Cambiando $\lambda \to x$ en el segundo miembro de la igualdad anterior y aplicando la propiedad 5 , se tiene: $\mathcal{F}[\dfrac{2a}{a^2+x^2}](\lambda) = 2\pi e^{-a|-\lambda|}$ *, de donde cambiando* $\lambda \to -x$*, y dividiendo por* 2π. $\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2a}{a^2+\lambda^2}](x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$. *Nótese que también* $\mathcal{F}[\dfrac{2a}{a^2+x^2}](\lambda) = 2\pi e^{-a|-\lambda|} \Rightarrow \mathcal{F}[\dfrac{1}{a^2+x^2}](\lambda) = \dfrac{\pi}{a} e^{-a|\lambda|}$, $a > 0$

Definición 2. *Una función* $f : (-\infty, \infty) \to (-\infty, \infty)$, C^∞*-diferenciable tiende* **Rápidamente a Cero** *si y sólo si tiene la propiedad*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^m f^{(n)}(x) = 0 \quad , \quad \forall n, m \in \mathcal{N}_0$$

Comentario 6. *La idea de la condición anterior significa geométricamente que para $|x|$ muy grande (a izquierda o derecha) la gráfica de la función f y las gráficas de todas sus derivadas son curvas que tienden asintóticamente más rápido al eje x que el crecimiento de cualquier potencia x^m (ver Fig. 2).*

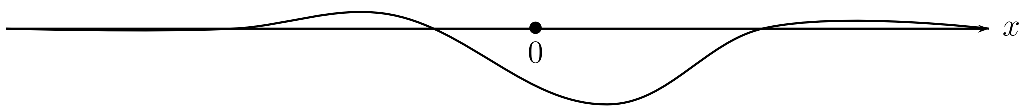


FIGURA 2

Teorema 2. *Sea f una función que tiende Rápidamente a Cero, entonces:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty \quad , \text{ (converge)}$$

Demostración: Si f tiende Rápidamente a Cero, en particular $\lim_{|x|\to\infty} x^2 f(x) = 0$. Entonces existe una costante $K \in \mathbb{R}^+$, suficientemente grande tal que $\forall |x| > K$, $x^2|f(x)| \leq 1$, es decir, $\forall |x| > K$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. Esta inecuación justifica la mayoración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \leq \int_{|x|\leq K} |f(x)|dx + \int_{|x|>K} |f(x)|dx$$

Pero $\int_{|x|\leq K} |f(x)|dx = M < \infty$, donde la constante M existe pues f es continua en el intervalo $[-K, K]$. Además la integral del segundo sumando también existe pues

$$\int_{|x|>K} |f(x)|dx \leq \int_{|x|>K} \frac{dx}{x^2} = 2\int_K^\infty \frac{dx}{x^2} = -2\frac{1}{x}\Big|_K^\infty = \frac{2}{K} < \infty \quad \blacksquare$$

Observación 1. *Si f tiende Rápidamente a Cero , todas sus derivadas $f^{(n)}$ tienden Rápidamente a Cero y por el Teorema anterior*

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)|dx < \infty$$

Teorema 3. *Sea f una función que tiende Rápidamente a Cero, entonces*

$$\boxed{\mathcal{F}[f'](\lambda) = i\lambda\mathcal{F}[f](\lambda)}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[f'](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\lambda x}dx = f(x)e^{-i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} + i\lambda \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x}dx}_{\mathcal{F}[f](\lambda)}$$

Pero $|f(x)e^{-i\lambda x}| = |f(x)| \to 0$ si $|x| \to 0$ pues f tiende Rápidamente a Cero. ∎

Comentario 7. *Nótese que la derivada de una función, es convertida en una simple multiplicación por $i\lambda$, bajo la Transformada de Fourier.*

Teorema 4. *Sea f una función que tiende Rápidamente a Cero, entonces:*

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \mathcal{F}[f^{(n)}](\lambda) = (i\lambda)^n\mathcal{F}[f](\lambda)}$$

Demostración: (Ejercicio de Inducción)

Para $n = 1$ es el Teorema anterior. Supongamos que el Teorema es verdadero para $n = k$.

Entonces, $\mathcal{F}[f^{(k+1)}](\lambda) = \mathcal{F}[(f^{(k)})'](\lambda) = (i\lambda)\mathcal{F}[f^{(k)}](\lambda) = (i\lambda)^{k+1}\mathcal{F}[f](\lambda)$ ∎

Comentario 8. *Una de las aplicaciones importantes de la Transformada de Fourier es a la resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales definidas en dominios no acotados del tipo, $(-\infty, \infty)$. Sea el siguiente ejemplo para ilustrar este tipo de aplicaciones.*

Busquemos una función $T = T(x,t)$, C^2-diferenciable, definida en el dominio $\Omega = (-\infty, \infty) \times (0, \infty)$ (dominio no acotado en la variable x) que satisfaga la Ecuación de Calor Unidimensional y la condición inicial de Cauchy:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{\partial T}{\partial t} = & \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ T(x,0) = & e^{-x^2} \end{array}\right| \quad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0$$

Indicación: $\mathcal{F}[e^{-ax^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$, $a > 0$

Observación 2. *El ejemplo planteado es una modelación de la distribución de* **Temperatura**, $T = T$(*variables espacial, tiempo*) *de una barra suficientemente aislada, de longitud infinita tal que cada punto en el instante inicial* $t = 0$, *tiene la temperatura que indica la condición inicial.*

Aplicando al problema, la Transformada de Fourier y usando el Teorema 2, se tiene:

$$\mathcal{F}\Big[\frac{\partial T}{\partial t}\Big](\lambda) = -\lambda^2 \mathcal{F}[T](\lambda). \qquad \text{Pero}$$

$\mathcal{F}\Big[\frac{\partial T}{\partial t}\Big](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(T(x,t))e^{-i\lambda x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\big(\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t)e^{-i\lambda x}dx\big) = \frac{\partial}{\partial t}\big(\mathcal{F}[T(x,t)](\lambda)\big)$
La interpretación del cálculo anterior significa que la Transformada de Fourier de la solución del problema planteado, como sólo función del tiempo t es solución de la Ecuación Diferencial Ordinaria

$$\frac{d}{dt}\big(\mathcal{F}[T](\lambda)\big) = -\lambda^2 \mathcal{F}[T](\lambda)$$

Pero $y(t) = c(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$, donde $c = c(\lambda)$ es constante arbitarria respecto del tiempo es la solución general de la E.D.O.

Como la Transformada de Fourier de la solución del problema planteado es solución de la E.D.O, entonces:

$\mathcal{F}\Big[T(x,t)\Big](\lambda) = c(\lambda)e^{-\lambda^2 t}$, para alguna constante respecto del tiempo , $c(\lambda) = ?$

Para determinar la constante c, consideremos la condición inicial, entonces tomando $t = 0$ se tiene:

$$\mathcal{F}[e^{-x^2}](\lambda) = c(\lambda)$$

Es decir, la constante adecuada $c(\lambda) =?$ es la Transformada de Fourier de la condición inicial. Usando la Indicación para $a = 1$ se tiene $c(\lambda) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$. Luego

$$\mathcal{F}\Big[T(x,t)\Big](\lambda) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2}{4}}e^{-\lambda^2 t} = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\lambda^2(1+4t)}{4}}$$

Para recuperar $T(x,t) = ?$, usando la propiedad 5 (Transformada de la Transformada) se tiene

$$2\pi T(-\lambda, t) = \mathcal{F}\Big[\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2(1+4t)}{4}}\Big](\lambda) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{\lambda^2}{1+4t}}$$

En la expresión anterior, dividiendo por 2π y cambiando $\lambda \to -x$ se obtiene la solución del problema planteado:

$$T(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{1+4t}} \ \text{. Nótese que} \quad \lim_{|x|\to\infty} T(x,t) = 0$$

Producto de Convolución

Es muy conocido que la integral de un producto de funciones **no es igual** al producto de las integrales de las funciones, en consecuencia la Transformada de Fourier de un producto de funciones, que es una integral, **no es igual** al producto de las

Transformadas de Fourier de las funciones. Sin embargo, es deseable una propiedad en este sentido y la solución es simplemente cambiar el producto ordinario de funciones definiendo un **nuevo producto**.

Definición 3. *Sean dos funciones $f, g : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ que tienden Rápidamente a Cero. El* **Producto de Convolución** *de f por g se define como:*

$$\boxed{f(x) * g(x) \equiv (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)d\xi}$$

Observación: El Producto de Convolución es bien definido en el sentido que la integral impropia de la definición es convergente. En efecto

$$|(f * g)(x)| \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty$$

donde existe la cota $M = sup_{x \in \mathbb{R}}\{|g(x)|\}$, pues g es una función que tiende rápidamente a cero.

Teorema 5. *Sean dos funciones $f, g : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ que tienden Rápidamente a Cero. Entonces*

$$\boxed{\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}[f * g](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi) d\xi \Big) e^{-i\lambda x} dx$$

Cambiando el orden de integración se puede escribir

$$\mathcal{F}[f * g](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} g(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx d\xi$$

Sea el cambio de coordenadas (variables), $t = x - \xi$, entonces

$$\mathcal{F}[f * g](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\lambda(t+\xi)} dt d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi}_{\mathcal{F}[f](\lambda)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt}_{\mathcal{F}[g](\lambda)} \quad \blacksquare$$

Comentario 9. *La fórmula del Teorema anterior se puede escribir en términos de la Transformada Inversa.*

Supongamos que $\mathcal{F}[f] = \hat{f}$ y $\mathcal{F}[g] = \hat{g}$, entonces $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] = f$ y $\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}] = g$

Por el Teorema 5 , $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}] = f * g$, y es inmediato que

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\hat{g}] = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}] * \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}]}$$

Teorema 6. *Sean dos funciones $f, g : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ que tienden Rápidamente a Cero. Entonces*

$$\boxed{\mathcal{F}[fg] = \tfrac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]} \quad \text{, o bien,} \quad \boxed{\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} * \hat{g}] = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}]}$$

Demostración:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} * \hat{g}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{f} * \hat{g})(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\lambda-\xi)d\xi\Big)e^{i\lambda x}d\lambda$$

Cambiando el orden de integración se puede escribir

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} * \hat{g}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(\lambda-\xi)e^{i\lambda x}d\lambda d\xi$$

Sea el cambio de coordenadas (variables), $t = \lambda - \xi$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} * \hat{g}](x) &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(t)e^{i(t+\xi)x}dtd\xi \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(t)e^{itx}dt \\
&= 2\pi\underbrace{\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi\Big]}_{\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x)}\underbrace{\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(t)e^{itx}dt\Big]}_{\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](x)} \\
&= 2\pi f(x)g(x)
\end{aligned}$$

O bien, $\mathcal{F}^{-1}[\hat{f} * \hat{g}] = 2\pi\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}]\mathcal{F}^{-1}[\hat{g}]$ ∎

Relación entre las transformadas de Laplace y Fourier

Sea la función $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{-at}\varphi(t) & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$, $a \geq 0$ donde $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función absolutamente integrable, seccionalmente continua y con derivadas laterales en cada punto, equivalentemente la función se puede escribir como $f(t) = \mu(t)\varphi(t)e^{-at}$

Por definición de la Transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\mu(t)\varphi(t)e^{-at}e^{-i\lambda t}dt = \int_{0}^{\infty}\varphi(t)e^{-(a+i\lambda)t}dt$$

Sea el exponente de la función exponencial en la integral anterior $a + i\lambda = s$, entonces $s \in \mathbb{C}$. La integral tiene la forma de una transformada de Laplace y se puede escribir:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) = \mathcal{L}[\varphi](s) \quad , \quad \text{donde} \quad s = a + i\lambda \in \mathbb{C}$$

Luego, la transformada de Fourier de f es una función en la variable real λ y se puede considerar como la transformada de Laplace de φ que es una función en la variable compleja s.

Ejemplo 7. *Sea $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$ una función absolutamente integrable , seccionalmente continua y con derivadas laterales en cada punto, entonces*

$$\mathcal{F}[f](\lambda) \;=\; \begin{cases} \mathcal{L}[f](i\lambda)+\mathcal{L}[f](-i\lambda) & si \;\; f\,es\ una\ función\ Par \\ \mathcal{L}[f](i\lambda)-\mathcal{L}[f](-i\lambda) & si \;\; f\,es\ una\ función\ Impar \end{cases}$$

Demostración: La función f admite integral de Fourier pues por hipótesis f satisface las condiciones para existencia de la transformada de Fourier . Entonces:

$$\mathcal{F}[f](\lambda) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i\lambda t}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

Si f es una función Par , es decir $f(-t)\equiv f(t)$, consideremos el cambio de coordenadas $t=-\eta$ en la integral

$$\int_{-\infty}^{o} f(t)e^{-i\lambda t}dt = -\int_{\infty}^{o} f(-\eta)e^{i\lambda\eta}d\eta = \int_{0}^{\infty} f(\eta)e^{i\lambda\eta}d\eta = \mathcal{L}[f](-i\lambda)$$

Luego,

$$\mathcal{F}[f](\lambda) \;=\; \mathcal{L}[f](-i\lambda)+\mathcal{L}[f](i\lambda)$$

Análogamente si f es una función Impar, ejercicio para el lector. ∎

EJERCICIOS

Ejercicio 1. *Sea la función $f:(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}$, tal que ,*
$f(x)=\mu(x+a)-\mu(x-a)$, $a>0$

i) *Encontrar una* **Representación en Integral de Fourier** *de f.*
ii) *Para cada $a>0$,* **¿ Cuál es el valor de la integral** $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a\lambda}{\lambda}d\lambda \;= ?$

Ejercicio 2. *Considere la función*

$$f_a(x)=\begin{cases} 1 & si \;\; 0\le x\le a \\ 0 & si \;\; x>a \end{cases} \quad , \;\; a>0$$

i) *Representar la función en una* **Integral de Fourier** *de la forma reducida,* $\int_0^\infty b_\lambda \operatorname{sen}\lambda x d\lambda$, $x\in(-\infty,\infty)$. *(Integral Senoidal de Fourier). Indicación: Considere una extensión adecuada de f.*
ii) *Para cada $0<x<a$.*

$$\textbf{¿ Cuál es el valor la Integral} \;\; , \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda a)-1}{\lambda}\operatorname{sen}(\lambda x)d\lambda = ?$$

Ejercicio 3. Idea. *Considerar un sistema de entrada y salida con la Transformada de Fourier, $\mathcal{F}[f]=g$*

i) *Defina una función f de entrada del tipo funciones definidas por tramos y preguntar por la salida.*

ii) *Defina una función g de salida del tipo función definida por tramos y pedir la transformada inversa*

Referencias

[1] A.N. Kolmogorof, S.V Fomin *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional.* Editorial MIR Moscu. 1972.

[2] D. Kreider, R. Kuller, D. Ostberg, F. Perkins.,*Introducción al Análisis Leneal. Parte 2.* Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1971

[3] E. Kreyszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Volumen II.* Editorial Limusa, 1974.

[4] L. Schwartz. *Mathematics for the Physical Sciences.* Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2008.