GEOMETRIA DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

E. SÁEZ

En general los textos de Cálculo, por ejemplo en [1,2,3,4], introducen el Teorema de la Función Implícita bajo el punto de vista del Análisis y su demostración usa fuertemente el Teorema de la transformación Inversa.

En estas notas se pretende comprender el Teorema de la Función Implícita bajo el punto de vista de la idea geométrica que involucra dicho Teorema.

Supongamos una ecuación en coordenadas cartesianas de la forma $E(x, y, z) = 0$. El primer miembro de la ecuación se interpreta como una función E a tres variables , que supondremos diferenciable en su dominio de definición , o bien , supondremos que la función E admite derivadas parciales continuas. En este caso diremos que la función E es de clase C^1 y escribiremos simplemente $E \in C^1$.

Una interpretación geométrica de las soluciones de la ecuación $E(x, y, z) = 0$, es que forman el Nivel Cero de la función E a tres variables en $dom(E) \subset \mathbb{R}^3$, más exactamente es el conjunto de puntos $E^{-1}(0)$ en $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\mathbf{E^{-1}(0) = \{(x, y, z) | E(x, y, z) = 0\}}$$

Nótese que la notación $E^{-1}(0)$, por definición designa el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}^3$ de la ecuación $E(x, y, z) = 0$, equivalentemente es el conjunto de las preimágenes del valor cero de la función E y no debe interpretarse como una función inversa de E.

La gráfica del nivel cero $E^{-1}(0)$ en $\mathbb{R}^3$ puede tener varias componentes conexas (Ramas) y ser muy complicada , por ejemplo una componente conexa puede ser una superficie como en la Fig. 1

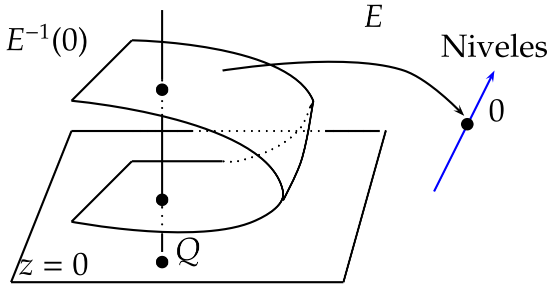

Fig. 1

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

Comentario: Nótese que la superficie de la Fig. 1, no es la gráfica de una función a dos variables, definida en algun dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y que contenga del punto Q, en el plano $z = 0$. El punto Q tiene al menos dos imágenes diferentes en la superficie de nivel $E^{-1}(0)$.

En estos apuntes nos interesa estudiar. **¿ Bajo que condiciones ?, partes de una superficie de nivel** $E^{-1}(0)$**, es la gráfica de alguna función a dos variables. Esta es la idea geométrica del Teorema de la Función Implícita.**

Definición 1. *Sea la ecuación* $E(x, y, z) = 0$*, entonces* $z = f(x, y)$ *definida en un conjunto abierto* $D \subset \mathbb{R}^2$, **es una función definida implícitamente** *por la ecuación, si y sólo si,* $E(x, y, f(x, y)) \equiv 0 \quad en \;\; D$

Comentario: Geométricamente la definición anterior dice que la función f*, es definida implícitamente por la ecuación, si* **la gráfica de** f **es parte de la superficie de nivel** $E^{-1}(0)$.

Definición 2. *Un punto P de un nivel diferenciable* $E^{-1}(0)$*, es* **Regular** *si el vector gradiente* $\vec{\nabla}E$ *no se anula en el punto,* $\vec{\nabla}E(P) \neq \vec{0}$*. En caso contrario P es es un punto* **singular** *del nivel.*

Comentario: Si el nivel $E^{-1}(0)$ *es una superficie que se autointersecta transversalmente y P es un punto de la intersección, entonces* $\vec{\nabla}E(P) = \vec{0}$*, pues geométricamente el vector gradiente , existe por la diferenciabilidad , es único y es perpendicular a dos superfices diferentes por dicho punto. El único vector que tiene esta propiedad es el vector nulo.*

Supongamos que la función a tres variables E, es diferenciable y está definida en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$*, o bien,* $E : \Omega \to \mathbb{R} \;\; , \;\; E \in C^1$

$$\text{(1)} \qquad \textit{Consideremos un punto P, arbitrario pero fijo tal que:} \begin{cases} i) & P \in E^{-1}(0) \\ ii) & \dfrac{\partial E}{\partial z}(P) \neq 0 \end{cases}$$

La propiedad $i)$*, dice que P es un punto del nivel cero de E.*

La propiedad $ii)$*, dice que la tercera componente del vector gradiente de E es no nula en el punto P, esto implica que el nivel cero de E es una superficie Regular en el punto P, pues* $\vec{\nabla}E(P) \neq \vec{0}$*. Además,* **Geométricamente el vector gradiente en el punto , no es paralelo al plano** $z = 0$.

La figura siguiente muestra ejemplos de puntos donde se satisfacen ambas propiedades de (1).

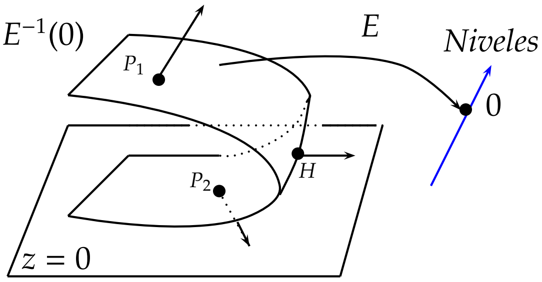

Fig. 2

Si el vector gradiente $\vec{\nabla}E(H) \neq \vec{0}$ y es paralelo al plano $z = 0$, entonces es inmediato que la segunda propiedad de (1) no se cumple, pues la **tercera componente del vector gradiente** *de E en el punto es nula, es decir,* $\dfrac{\partial E}{\partial z}(H) = 0$.

En los puntos $P_1, P_2 \in E^{-1}(0)$ de la Fig. 3, $\dfrac{\partial E}{\partial z}(P_1) \neq 0 \neq \dfrac{\partial E}{\partial z}(P_2)$ *y a diferencia del punto H las dos propiedades de (1) se cumplen. Esto permite considerar por ejemplo, las superficie $S_1, S_2 \subset E^{-1}(0)$, suficientemente pequeñas, alrededor de cada uno de los puntos P_1, P_2 cuyas proyecciones D_1, D_2 al plano $z = 0$ son* **dominios de funciones** $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$, *respectivamente, tales que $gr(f_1), gr(f_2) \subset E^{-1}(0)$*

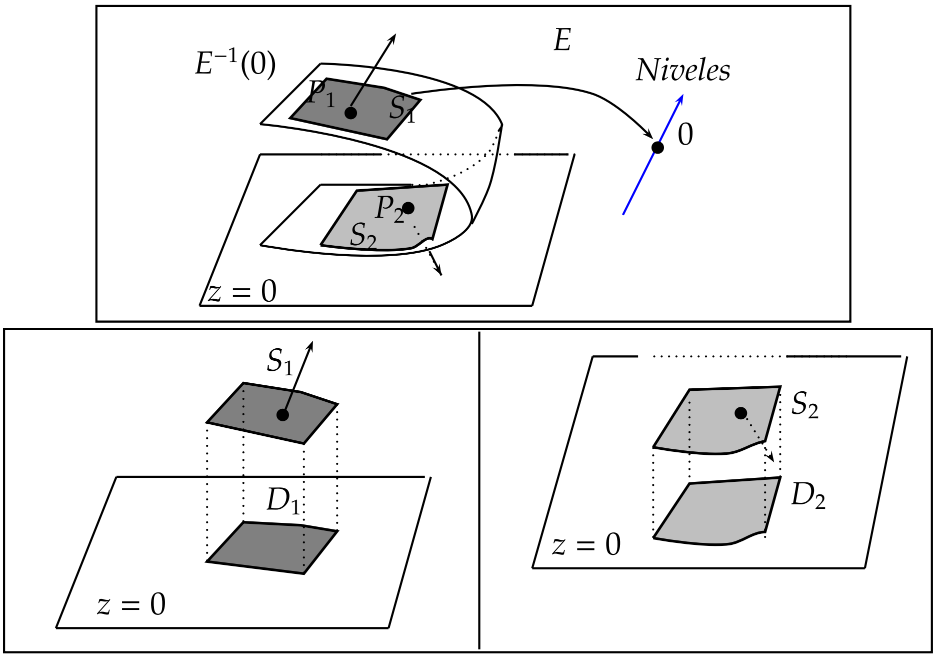

Fig. 3

El argumento geométrico anterior justifica:

Teorema 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un subconjunto abierto, una función $E : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $P_0 \in \Omega$ un punto tal que;* $\begin{cases} i) & P_0 \in E^{-1}(0) \\ ii) & \dfrac{\partial E}{\partial z}(P_0) \neq 0 \end{cases}$. *Entonces,* **existe** *una* **única** *función implícita* **de clase $\mathbf{C^1}$** *, $z = f(x,y)$, definida en una vecindad $\mathscr{V}$ del punto (x_0, y_0) en $\mathbb{R}^2$, tal que,* $\mathbf{gr(f)} \subset \mathbf{E^{-1}(0)}$.

Dem. Teorema 1. El Teorema tiene tres afirmaciones sobre la función implícita :

$$\boxed{i)\ \text{Existencia} \quad ii)\ \text{Diferenciabilidad} \quad iii)\ \text{Unicidad}}$$

i) **Existencia**. De las propiedades del enunciado, que son exactamente las propiedades en (1) se tiene que P_0 es un punto regular , esto significa por la introducción , que parte de la superficie de nivel $E^{-1}(0)$, suficientemente pequeña alrededor del punto P_0 es la gráfica de una función implícita tal que $\mathbf{gr(f)} \subset \mathbf{E^{-1}(0)}$, lo que justifica la existencia de la función implícita.

ii) **Diferenciabilidad**. Como la función E es diferenciable por hipótesis, entonces cualquier parte del nivel $E^{-1}(0)$ es diferenciable , en particular la superficie $\mathbf{gr(f)} \subset \mathbf{E^{-1}(0)}$ con f función implícita, pues $E(x,y,z) = z - f(x,y)$ de donde f es diferenciable pues E es diferenciable.

iii) **Unicidad**. Como P_0 es un punto Regular , esto significa que localmente en una vecindad suficientemente pequeña de P_0 en $\mathbb{R}^3$ la superficie de nivel $E^{-1}(0)$ no se puede autointersectar en algún subconjunto que contenga el punto P_0, pues en caso contrario el gradiente $\vec{\nabla}E(P_0) = \vec{0}$ y P_0 es un punto singular, lo que es contradictorio con las hipótesis. Luego existe una vecindad suficientemente pequeña de P_0 en $\mathbb{R}^3$ que tiene la propiedad de aislar sólo una parte de la superficie de nivel $E^{-1}(0)$ en dicha vecindad, lo que demuestra la unicidad.

□

Comentario. *En textos más avanzado, el Teorema (1) se generaliza a funciones E que dependen de n-variables, $n \geq 2$.*

PREGUNTA: *Bajo las hipótesis del Teorema 1. ¿ Cómo obtener la primera Derivada Parcial de una función implícita ?*

RESPUESTA: *Consideremos un subconjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y una función $E : \Omega \to \mathbb{R}$, C^1 tal que $P_0 \in \Omega$ es un punto donde;* $\begin{cases} i) & P_0 \in E^{-1}(0) \\ ii) & \dfrac{\partial E}{\partial z}(P_0) \neq 0 \end{cases}$. *Entonces,* **existe** *una* **única** *función implícita* **de clase $\mathbf{C^1}$** *, $z = f(x,y)$. En una vecindad del punto P_0 se satisface la identidad $E(x,y,f(x,y)) \equiv 0$. Por la Regla de la Cadena, derivando parcialmente* *la identidad respecto de la variable x se tiene:*

$$\boxed{E_x + E_z \frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0, \quad \textit{de donde,} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \equiv -\frac{E_x}{E_z}}$$

Análogamente, por la Regla de la Cadena derivando parcialmente la identidad respecto de la variable y se tiene:

$$\boxed{E_y + E_z \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 0, \quad \textit{de donde,} \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv -\frac{E_y}{E_z}}$$

EJERCICIO: *Bajo las hipótesis que la función E es de clase C^2 en el Teorema 1. ¿ Cómo obtener la segunda Derivada Parcial de una función implícita ?*
RESPUESTA: *Por la Regla de la Cadena, derivando parcialmente por ejemplo, la identidad para la primera derivada, $E_x + E_z \frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$, respecto de la variable x se obtiene:*

$$E_{xx} + 2E_{xz}\frac{\partial z}{\partial x} + E_{zz}\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + E_z \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv 0,$$

de donde es inmediato: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv -\dfrac{-2E_x E_{xz} E_z + E_{xx} E_z^2 + E_x^2 E_{zz}}{E_z^3}$

Análogamente para las restantes segundas derivadas parciales.

Ejercicios

1.- *Considere la ecuación $x^3y + y^2 - xy^5 - 1 = 0$*
   i) **Demuestre** *que la ecuación* **define implícitamente**, *una función de la forma $y = f(x)$ alrededor del punto $(1, 1)$.*
   ii) *¿ Cuál es el* **valor de la pendiente** *de la función implícita f , en el punto $(1, 1)$?.*
   iii) *¿* **Como es la concavidad** *de f alrededor del punto $(1, 1)$?.*
   iv) *Haga un* **bosquejo de la gráfica** *de f en una vecindad del punto $(1, 1)$.*

2.- *Considere la ecuación $x^3yz^3 + z^2y^2 - xzy^5 - 1 = 0$*
   1) **Demuestre** *que la ecuación* **define implícitamente**, *una función de la forma $z = f(x, y)$ alrededor del punto $(1, 1, 1)$.*
   ii) *Sea c, la curva intersección del plano $x = 1$ con la gráfica de la función f. ¿ Cuál es* **la pendiente** *de la curva c en el plano $x = 1$, en el punto $(1, 1, 1)$?.*
   iii) *¿* **Como es la concavidad** *de c, en el plano $x = 1$, alrededor del punto $(1, 1, 1)$?.*
   iv) *Haga un* **bosquejo de la gráfica** *de c, en el plano $x = 1$, en una vecindad del punto $(1, 1, 1)$.*

Bibliografía

1.- *Watson Fulks, Cálculo Avanzado. Limusa-Wiley, S. A. 1970*
2.- *Serge Lang, Cálculo II. Fondo Educativo Interamericano, S. A. 1976.*
3.- *Elon Lages Lima, Curso de Análise, vol. 2 Projeto Euclides CNPq-Brasil, 1981*

4.- *Walter Rudin, Principios de Análisis Matemático. McGRAW-Hill BOOK COMPANY. 1966.*