INDUCCIÓN MATEMÁTICA

EDUARDO SÁEZ , IVÁN SZÁNTÓ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

1. INTRODUCCIÓN

El método deductivo, muy usado en matemática, obedece a la siguiente idea: " A partir de un cierto conjuntos de axiomas aceptados sin demostración y de reglas lógicas no contradictorias, se deducen otros enunciados llamados teoremas combinando los axiomas y respetando en cada etapa las reglas lógicas".

Otro método para demostrar resultados generales que dependen en algún sentido de los números naturales es conocido con el nombre de **Inducción Matématica .** Esta dependencia de los números naturales significa: se sabe que una determinada afirmación es verdadera para algunos casos particulares y surge la pregunta. ¿ Dicha afirmación sigue siendo verdadera para los **infinitos** números naturales restante ?.

Existen muchas afirmaciones que **sólo** son válidas para un número **finito** de casos y en consecuencia son falsas para un número infinitos de situaciones. Sin embargo, podemos encontrar proposiciones (afirmaciones) que son verdaderas sólo a partir de un cierto número natural n_0, de ser asi, la técnica que se desarrollaremos se llama **Inducción Incompleta**. Para demostrar que una proposición $p(n)$,$\forall n \in M \subseteq \mathbb{N}$, es verdadera es necesario comprobar la validez de ella para todos los elementos del conjunto M. En el caso en que $M= \mathbb{N}$, diremos que es una **Inducción Completa.**

Si se requiere demostrar la falsedad de una cierta proposición $p(n), \forall n \in M \subseteq \mathbb{N}$, es suficiente indicar un elemento particular $m \in M$ de manera que $p(m)$ sea falsa.
(Construcción de un contra ejemplo).

Ejemplo 1. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 3n - 1 < 0$

Es fácil probar que esta desigualdad es verdadera para $n = 1, 2, 3$. *Sin embargo, para* $n = 4$ *no se cumple ya que* $4^2 - 3 \cdot 4 - 1 = 3 > 0$. *Nótese que este ejemplo sencillo muestra que una proposición puede ser verdadera para los primeros números naturales, sin embargo, es* **falsa** *, para números naturales más grandes.*

Otros ejemplos:

Ejemplo 2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$, *es divisible por 5.*

Es fácil probar que esta proposición es verdadera para $n = 1, 2, 3$. *Sin embargo, para* $n = 4$ *no se cumple dado que* $(2{\cdot}4-1)(2{\cdot}4+1)(2{\cdot}4+3) = 693$. *no es divisible por 5*

Ejemplo 3. *(Ejemplo dado por Leonhard Euler (1707-1783)*

Consideremos el polinomio cuadrático $p(n) = n^2 + n + 41$ *y determinemos su valor para ciertos* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcrrrrrrrr} n & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ n^2+n+41 & : & 43 & 47 & 53 & 61 & 71 & 83 & 97 & 113 \end{array}$$

Nótese que todos los números que se obtienen son primos. Se podría esperar que este polinomio cuadrático continua generando números primos. Desafortunadamente no es asi, para $n = 40$, *se tiene* $1681 = 41^2$, *que no es un número primo, luego la proposición que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n + 41$ *es un número primo resulta falsa.*

2. **Principio de inducción Matemática**

Una proposición $p(n)$ es verdadera para todos los valores de la variable n si se cumplen las siguientes condiciones :

Paso 1.- La proposición $p(n)$ es verdadera para $n = 1$, o bien, $p(1)$ es verdadera.
Paso 2.- **Hipótesis de Inducción** . Se supone que $p(k)$ es verdadera , donde k es un número natural cualesquiera.
Paso 3.- **Tésis de Inducción**. Se demuestra que $p(k+1)$ es verdadera, o bien,

$$p(k) \quad \text{verdadera} \quad \Rightarrow p(k+1) \quad \text{verdadera.}$$

La técnica de Inducción Matemática consiste en los tres pasos anteriores. Si se necesita demostrar la validez de una proposición $p(n)$ para todos los valores naturales n, entonces es suficiente que se cumplan: Paso 1, Paso 2 y Paso 3 .

Comentario: Intuitivamente la idea anterior se conoce con el nombre de "Efecto Dominó". Si imaginamos una fila infinita de fichas de dominó: dispuestas verticalmente y suficientemente próximas una cualquiera de la siguiente , entonces si el volteamiento de la primera ficha provoca el volteamiento de la segunda ficha, por el Principio de Inducción Matemática la fila completa es volteada.

Existen dos variantes útiles sobre el Principio de Inducción Matemática que deben ser considerados . En la primera variante, la proposición por demostrar involucra los naturales no menores a un natural fijo n_0, en este caso el Principio de Inducción quedaria como sigue:

Si $p(n)$ es verdadera para n_0 y si $p(m+1)$ es verdadera para todo natural $m \geq n_0$ para la cual $p(m)$ es verdadera, entonces $p(n)$ es verdadera para todo natural $n \geq n_0$.

La segunda variante se aplica de preferencia en el caso cuando $p(m+1)$ no puede ser fácilmente deducible de $p(m)$, pero su validez depende de $p(k)$ para cualquier $k < m$. Si $p(1)$ es verdadera y si $p(m+1)$ es verdadera para todo $m \geq 1$ para la cual todas las proposiciones $p(1), p(2), p(3), ..., p(m)$ son verdaderas , entonces $p(n)$ es verdadera para $n \geq 1$. Para ilustrar el uso de estas variantes, consideremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4. *Determine para que valores de $n \in \mathbb{N}$ es verdadera la desigualdad*

$$2^n > n^2 + 4n + 5$$

Al examinar los valores de $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ nos damos cuenta que la desigualdad es incorrecta, pero si es verdadera para $n = 7$, por lo que podemos intentar demostrar por el método de Induccion Incompleta que para todos los valores de $n \geq 7$, la desigualdad es verdadera.

Paso 1.- *Si $n = 7$, obtenemos*

$$2^7 = 128 > 7^2 + 4 \cdot 7 + 5 = 82$$

o sea, cuando $n = 7$ la desigualdad es correcta.

Paso 2.- *(Hipótesis Inductiva) Se supone que la desigualdad es verdadera para un cierto valor de $n = k$, o sea,*

$$2^k > k^2 + 4k + 5.$$

Paso 3.- *Finalmente a partir de la hipótesis inductiva, se desea probar la Tesis dada por*

$$2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5.$$

Al multiplicar la desigualdad dada en la hipótesis inductica por 2, obtenemos

$$2^{(k+1)} > 2k^2 + 8k + 10$$

Transformando el segundo miembro de esta desigualdad obtenemos

$$2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5 + k^2 + 2k$$

Teniendo en cuenta que $k^2 + 2k > 0$ para todo $k \geq 7$, podemos deducir que $2^{(k+1)} > (k+1)^2 + 4(k+1) + 5$, obteniendo lo que se requeria demostrar (Tesis).

Ejemplo 5. *Demostrar que la suma de los n primeros números naturales es igual a $n(n+1)/2$.*

Demostración:
Queremos probar que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n(n+1)/2$$

Sea $p(n)$: $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n(n+1)/2$, debemos probar que $p(n)$ satisface las propiedades (1), (2) y (3).

(1) $p(1) \ : \ 1 = 1(1+1)/2,$ *lo cual es verdadero.*

(2) Se supone que la igualdad es verdadera para un cierto valor de k*, es decir,* $1+2+3+4+...+k = k(k+1)/2$

(3) Sea $k \in \mathbb{N}$*, debemos probar que* $p(k) \Longrightarrow p(k+1)$ *es verdadero. Notese que si* $p(k)$ *es falsa la implicación es verdadera, de modo que hay que hacer la demostración suponiendo que* $p(k)$ *es verdadera.*

Como $p(k+1) \ : 1+2+3+...+k+(k+1) = (k+1)((k+1)+1)/2,$ $p(k+1)$ *debe formarse de* $p(k)$ *sumando* $k+1$ *a ambos mienbros de la igualdad (de la Hipótesis inductiva):*

$1+2+3+...+k+(k+1) = k(k+1)/2+(k+1) = (k+1)(k/2+1) = (k+1)(k+2)/2.$ *Hemos confirmado nuestras sospechas, lo que es, hemos deducido que* $p(k+1)$ *es verdadera, suponiendo que* $p(k)$ *lo es. Así, hemos demostrado que* $\forall n \in \mathbb{N} \ : 1+2+3+4+...+n = n(n+1)/2$ *es verdadera.*

Ejemplo 6. *Probar que* $\forall n \in \mathbb{N} \ : 1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$

Solución: Sea $p(n)$ *:* $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$

Entonces $p(1)$*:* $1\cdot 3 = 1(1+1)(2\cdot 1+7)/6 = 2\cdot 9/6 = 3,$ *lo que prueba que* $p(1)$ *es verdadera.*

Hipótesis inductiva:

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+k(k+2) = k(k+1)(2k+7)/6.$$

(Suponemos que p(n) es verdadera) Tesis:

$$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+k(k+2)+(k+1)(k+3) = (k+1)(k+2)(2k+9)/6.$$

(Queremos probar que p(k+1) es verdadera). Tenemos:

$1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+k(k+2)+(k+1)(k+3) = k(k+1)(2k+7)/6+(k+1)(k+3) = \dfrac{(k+1)}{6}(k(2k+7)+6(k+3)) = (k+1)(2k^2+13k+18)/6 = (k+1)(2k+9)(k+2)/6$ *lo que prueba que* $p(k+1)$ *es verdadera. Luego, la formula* $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+n(n+2) = n(n+1)(2n+7)/6$ *es verdadera para todo* $n \in \mathbb{N}$

Ejemplo 7. *Determinar si el producto de 3 números impares consecutivos es siempre divisible por 6.*

Solución: Sea $p(n)$ *:* $(2n-1)(2n+1)(2n+3) = 6q$ *donde* q *es algún número natural . Queremos determinar si* $p(n)$ *se cumple para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

$p(1) : \ 1\cdot 3\cdot 5 = 15 = 6q \Longrightarrow q = \frac{5}{2} \notin \mathbb{N}$*. Luego* $p(1)$ *es falso. Se puede continuar analizando* $p(2), p(3), p(4), ...$ *y vemos que todos no cumplen la condición que sea divisible por 6. Es facil ver que* $(2n-1)(2n+1)(2n+3) = 8n^3+12n^2-2n-3 = 2(4n^3+6n^2-n-1)-1$ *luego este número es de la forma* $2j-1$ *que es un número impar y por lo tanto no es divisible por 6.*

Ejemplo 8. *Determine si la suma de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 6.*

Demostración: Sea $p(n)$*:* $\quad n + (n+1) + (n+2) = 6q, \quad q \in \mathbb{N}$*. Entonces* $p(1): \ 1+2+3 = 6$ *es verdadera* $\ (q = 1.)$
Hipótesis inductiva : $p(k) = k + (k+1) + (k+2) = 6q_1, \ q_1 \in \mathbb{N}$ *es verdadera.*
Por demostrar $p(k+1): \ (k+1) + (k+2) + (k+3) = q_2, \ q_2 \in \mathbb{N}$ *es verdadera.*

Como $(k+1) + (k+2) + (k+3) = k + (k+1) + (k+2) + 3 = 6q_1 + 3 = 6(q_1 + \frac{1}{2}) \notin \mathbb{N}$*. Luego* $p(k)$ *verdadero no implica* $p(k+1)$ *verdadero. Por lo tanto,* $p(n): \quad n+(n+1)+(n+2) = 6q, \ q \in \mathbb{N}$*, es falso. La suma de 3 enteros consecutivos no es necesariamente divisible por 6.*

Observación: Es facil ver que $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$*, de donde para que sea divisible por 6, necesariamente el factor* $(n+1)$ *debe ser un número impar para cualquier* n *natural, lo que es falso.*

Ejemplo 9. *Consideremos un ejemplo con desigualdades.*
Determine todos los números naturales para los cuales:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n > 2^n$$

Solución: La fórmula no es válida para $n = 1, 2, 3$

Pra $n = 4$*, se tiene que* $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 > 2^4 = 16$ *es verdadera.*

Supongamos que la desigualdad es válida para $k \in \mathbb{N}$*,* $\quad$ *con* $k \geq 4$*; esto es* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k > 2^k, \ k \geq 4$.

Por demostrar que la desigualdad es válida para $k+1$*, es decir que*

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k \cdot (k+1) > 2^{k+1}, \ \ k \geq 4.$$

En efecto:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k \cdot (k+1) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k) \cdot (k+1) > 2^k(k+1) > 2^k \cdot 2 = 2^{+1}.$$

Luego $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n > 2^n$*, y por lo tanto* $\forall n \in \mathbb{N}, \ \ n \geq 4 \ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n > 2^n$

Ejemplo 10. *Consideremos el siguiente ejemplo de divisibilidad:*

Demostrar por inducción, que si n *es un número impar,* $7^n + 1$ *es divisible por 8.*

Antes de aplicar inducción conviene hacer un cambio de índices. Sea $n = 2i - 1$.

Entonces si $i = 1, 2, 3, ...$ *se tiene que* $n = 1, 3, 5, ...$ *y nuestro enunciado se transforma en:*

7^{2i-1} $\quad$ *es divisible por 8,* $\quad \forall i \in \mathbb{N}$.

Para $i = 1, \quad 7^1 + 1 = 8$ *es divisible por* 8*, lo que es una proposición verdadera.*

Hipótesis inductiva: $7^{2i-1} + 1$ *es divisible por* 8.

Tesis: 7^{2i+1} $\quad$ *es divisible por* 8.

Dado que nuestra única información es la hipótesis, debemos hacer que la expresión $7^{2i-1}+1$ *aparezca en el desarrollo*

$$7^{2i+1}+1 = 7^2(7^{2i-1})+1 = 7^2(7^{2i-1}+1)-7^2+1 = 7^2(7^{2i-1}+1)-48$$

y aquí ambos sumandos son divisibles por 8, luego 8 divide a $7^{2i+1}+1$. *Luego resulta que* 7^n+1 *es divisible por 8 para todo* n *impar.*

3. **Ejercicios resueltos.**

1) Pruebe que la fórmula

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

es válida para todo natural n.

Demostración. Sea $p(n)$, $\quad 1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n\cdot(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.
Entonces $p(1)$, $\quad 1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3} = 2$ es verdadera.
Hipótesis Inductiva: $p(k)$ verdadera, es decir

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k\cdot(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

Tesis: Por demostrar $p(k+1)$, es decir

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Sumando $(k+1)\cdot(k+2)$ a ambos lados a la igualdad de la hipótesis inductiva se obtiene:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)\cdot(k+2)$$

luego sólo resta probar que

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)\cdot(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Factorizando por $(k+1)(k+2)$, se tiene $(k+1)(k+2)(1+\frac{k}{3}) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$, que es justamente la tesis deseada y lo que prueba que $p(n)$ es verdadera para todo natural n

2) Pruebe que para todo número natural $n>1$, el último dígito del número $2^{2^n}+1$ es 7.

Demostración.
Denotando por $p(n)$ la proposición a demostrar, podemos observar que para $n=2$, $2^{2^2}+1=17$ y la proposición es verdadera.

Nuestra hipótesis inductiva es para $n=k$, es decir aceptamos que el último dígito de $2^{2^k}+1$ es 7.

Tesis: Por demostrar que el último dígito de $2^{2^{k+1}}+1$ es 7
Notando que $2^{2^{k+1}}+1 = (2^{2^k}+1)^2-2(2^{2^k}+1)+2$ podemos concluir con la ayuda de la hipótesis inductiva que el último dígito de $(2^{2^k}+1)^2$ es 9, el último

dígito de $2(2^{2^k}+1)$ es 4 que luego al restarlos y sumarle 2, se demuestra la proposición.

3) Demuestre que para todo natural $n \geq 2$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$$

Demostración
Sea $p(n)$ la proposición dada, luego para $n=2$, se tiene que $1+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$. La proposición verdadera.
Hipótesis de inducción: $n=k$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$$

Tesis: $n=k+1$, Por demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

Sumando $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ a la igualdad de la hipótesis inductiva se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+....+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Como

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}}>\frac{k+1}{\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}$$

se concluye la demostración.

4) Demuestre que para todo natural n, $\quad n^5-n$ es divisible por 5.
Demostración.
Sea $p(n)$ la proposición dada, luego para $n=1$ se tiene que $0=5\cdot 0$ lo cual es verdadero.
Hipótesis de inducción: $n=k$, k^5-k es divisible por 5
Tesis: $n=k+1$, Por demostrar que $(k+1)^5-(k+1)$ es divisible por 5
Dado que nuestra única información es la hipótesis debemos hacer que la expresión k^5-k, aparezca en nuestro desarrollo
En efecto,

$$(k+1)^5-(k+1)=k^5+5k^4+10k^3+10k^2+4k$$

y es igual a

$$k^5-k+5k(k^3+2k^2+2k+1)$$

de donde ambos sumandos son divisibles por 5, luego para todo natural n, n^5-n es divisible por 5.

5) La sucesión de Lucas (Anatole Lucas, 1842-1891), es una sucesión de la forma

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...$$

y es definida por la regla inductiva:

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_2 = L_1 + L_0,\ L_3 = L_2 + L_1,\ ..., L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, ...$$

Sean $a, b, c, r, s,$ y t números enteros fijos. Sea $L_0,\ L_1, ...$ la sucesión de Lucas. Demostremos que $rL_{n+a} = sL_{n+b} + tL_{n+c}$ es verdadera para $n = 0, 1, 2, 3, ...$ asumiendo que es verdadera para $n = 0$ y $n = 1$.
Dado que la tesis es verdadera para $n = 0$ y $n = 1$, podemos asumir (Hipótesis inductiva) que es verdadera para $n = 0, 1, 2, 3..., k$ con $k \geq 1$ para luego demostrar que es verdadera para $n = k + 1$.
Por hipótesis tenemos

$$\begin{array}{rcl}
rL_a & = & sL_b + tL_c \\
rL_{1+a} & = & sL_{1+b} + tL_{1+c} \\
rL_{2+a} & = & sL_{2+b} + tL_{2+c} \\
... & & .... \\
rL_{k-1+a} & = & sL_{k-1+b} + tL_{k-1+c} \\
rL_{k+a} & = & sL_{k+b} + tL_{k+c}
\end{array}$$

Sumando estas las dos últimas ecuaciones se obtiene

$$r(L_{k+a} + L_{k-1+a}) = s(L_{k+b} + L_{k-1+b}) + t(L_{k+c} + L_{k-1+c})$$

Utilizando la relación de los números de Lucas $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, se tiene

$$rL_{k+1+a} = sL_{k+1+b} + tL_{k+1+c}$$

y esto completa la demostración.

4. Ejercicios propuestos

1) Demuestre por inducción las siguientes igualdades:
   a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
   b) $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdots (n + n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot (2n - 1)$
   c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$
   d) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \cdots (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$
   e) $(1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5) + (1^7 + 2^7 + 3^7 + ... + n^7) = 2(1 + 2 + 3 + ... + n)^4$
   f) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$
2) Para todo natural n, demuestre que a_n es divisible por b
   i) $a_n = 2^{2n} - 1, \quad b = 3$
   ii) $a_n = n^2(n^4 - 1), \quad b = 60$
   iii) $a_n = n^3 + 5n, \quad b = 6$

3) Considere la sucesión $1, 5, 85, 21845, ...,$ definida por

$$c_1 = 1,\ c_2 = c_1(3c_1 + 2), ..., c_{n+1} = c_n(3c_n + 2), ...$$

Pruebe que para todo entero n positivo, $\quad c_n = \frac{4^{2^{n-1}}}{3}$

4) Demuestre que la desigualdad de Bernoulli (Jacques Bernoulli 1654-1705)

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

es válida para $a \geq -1$ y para todo entero no negativo.

5) Pruebe la desigualdad

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

6) Demuestre que para todo natural n se cumple

$$b^n - a^n = (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3}a^2 + ... + ba^{n-1} + a^{n-1})$$

7) La sucesión $\{a_n\}$ se define por la relación de recurrencia $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1},\ a_1 = 0,\ \ a_2 = 1$. Demuestre que para todo natural n, $a_n = 2^{n-1} - 1$.

8) Pruebe que para natural n, el número $4^n + 15n - 1$ es divisible por 9

9) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} \in \mathbb{N}$$

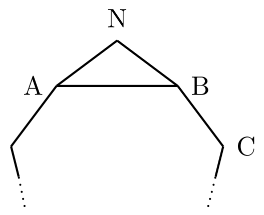
10) Para todo n natural, demuestre la siguiente desigualdad

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2^n - 1} \leq n$$

11) Demuestre que

$$3 + 33 + 333 + ... + 3... \underbrace{}_{n\ veces} ....3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}$$

12) Pruebe que el número de diagonales de un n-polígono convexo es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$. (Ver Figura)



13) Demuestre que para todo natural n, se cumple que

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3$$

14) Demuestre que cualquier suma de dinero, múltiplo entero de mil pesos, mayor o igual que 5.000 (Cinco mil pesos), puede ser descompuesta en billetes múltiplo de cinco mil pesos y de dos mil pesos.

15) Pruebe que si $\sin\alpha \neq 0$, entonces la identidad

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha ... \cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

es cierta para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

5. **Sumas y Productos**

El símbolo Σ se llama Sigma en el alfabeto griego y en Español corresponde a la letra S. Es natural usar este símbolo para referirse a la idea de Suma, o bien , Sumatoria.

Con el símbolo Σi^2, se desea indicar la suma de los términos de la forma i^2 para varios valores enteros de i. El rango para estos valores enteros se indica en la parte inferior y superior respectivamente de Σ. Por ejemplo en la forma

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$$

o bien, en la forma $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

El número de términos que tiene una suma $\sum_{j=n_1}^{n_2} h(j)$, $n_2 \geq n_1$ siempre es igual a $n_2 - n_1 + 1$. Por otro lado las sumas no necesariamente deben comenzar desde 1 y cualquier letra como un contador puede ser usada.

Finalmente cualquier función $f(i)$ puede ser utilizada en lugar de i^2, es decir

$$f(2) + f(3) + f(4) + ... + f(n) + f(n+1) = \sum_{j=2}^{n+1} f(j)$$

6. **Ejemplos.**

1) $\sum_{i=1}^{4} i^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100$
2) $\sum_{j=3}^{5} j(j+2) = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 = 74$
3) $\sum_{\theta=1}^{n} g(\theta) = g(1) + g(2) + g(3) + ... + g(n)$
4) $\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{k} = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + ... + \frac{a_m}{m}$
5) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
6) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
7) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = 2^{1-n} + 2(n-1)$
8) $\sum_{k=-1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \cot\frac{\pi}{2n}$

7. **Propiedades.**

A continuación se dan las principales propiedades de la sumatoria:

$$\begin{array}{rrcl}
1) & \sum_{k=j}^{m} 1 & = & m-j, \quad m \geq j \\
2) & \sum_{k=0}^{n+1} a_k & = & a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k \\
3) & \sum_{k=1}^{n} a_k + b_k & = & \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \\
4) & \sum_{k=1}^{n} c a_k & = & c\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad c \text{ constante} \\
5) & \sum_{k=1}^{n} c & = & nc, \quad c \text{ constante} \\
6) & \sum_{k=1}^{n} a_k & = & \sum_{k=1}^{j} a_k + \sum_{k=j+1}^{n} a_k \\
7) & \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1} & = & a_n - a_0 \ \text{ (Propiedad Telescopica)} \\
8) & \sum_{k=n}^{m} a_k - a_{k-1} & = & a_m - a_{n-1} \ \ m \geq n \ \text{ (Propiedad Telescopica)} \\
9) & \sum_{k=n}^{m} a_{k-j} - a_{k-j-1} & = & a_{m-j} - a_{n-j-1} \ \ m \geq n \ \text{ (Propiedad Telescopica)} \\
10) & (\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 & \leq & (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 (\sum_{k=1}^{n} b_k)^2 \ \text{ (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)}
\end{array}$$

8. **Ejercicios resueltos.**

1) Determine la suma de los n primeros números naturales impares.

La suma de los n primeros números naturales impares está dada por

$$S = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + ... + 2n - 1 = n^2$$

Como $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1$, se tiene

$$S = \frac{2n(n+1)}{2} - n = n^2$$

2) Demuestre que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Para todo $j \geq 1$, $\frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{1}{j/2}$ y es fácil ver que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \frac{(-1)^k}{k}$

De $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, obtenemos

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = -\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

.

3) Utilizando la propiedad telescópica, determine la suma de $\sum_{k=-5}^{n-1} 3^{k-2}$

Es fácil ver que

$$3^{k-2} = \frac{1}{2}3^{k-1}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{2}3^k\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right] = \frac{1}{2}(3^{k-1} - 3^{k-2})$$

Luego

$$\frac{1}{2}\sum_{k=-5}^{n-1} 3^{k-1} - 3^{k-2} = \frac{1}{2}\left[3^{n-2} - 3^{-7}\right]$$

4) Demostrar, utilizando inducción sobre n, que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$$

Sea $p(n)$: $\sum_{k=1}^{n} k(k+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$
$p(1)$: $1 \cdot 3 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+7)}{6} = 3$, verdadero
$p(j)$: $\sum_{k=1}^{j} k(k+2) = \frac{j(j+1)(2j+7)}{6}$ Hipótesis Inductiva
Por demostrar (tesis) $p(j+1)$:; $\sum_{k=1}^{j+1} k(k+2) = \frac{(j+1)(j+2)(2j+9)}{6}$

Sumando a la hipótesis $(j+1)(j+3)$ se tiene

$$(j+1)(j+2) + \sum_{k=1}^{j} k(k+2) = (j+1)(j+2) + \frac{j(j+1)(2j+7)}{6}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j+1} k(k+2) &= (j+1)(j+2) + \frac{j(j+1)(2j+7)}{6} \\ &= \frac{(j+1)(2j^2+13j+18)}{6} \\ &= \frac{(j+1)(j+2)(2j+9)}{6} \end{aligned}$$

lo que demuestra la proposición.

9. **Ejercicios propuestos.**

1) Demuestre que:
   a) $\sum_{j=0}^{n} x^{n-j+1}y^j = \sum_{k=-1}^{n-1} x^{n-k}y^{k+1}$
   b) $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$
   c) $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k-1)$
2) Demuestre, usando el principio de inducción, la validez de las siguientes fórmulas:
   a) $\sum_{j=1}^{n} 5^{j-1} = \frac{5^n-1}{4}$
   b) $\sum_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$
   c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$
   d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - 2^{-n}$
   e) $\sum_{k=1}^{n} 2k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$
   f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
   g) Demuestre si la suma $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(2k+1)$ es igual a n si n es par y es igual a $-(n+2)$ si n es impar.

10. **Productos.**

Π es la letra "pi" mayúscula en el alfabeto griego y corresponde a la letra P del español. Es costumbre usar esta letra griega para designar productos.

$$\Pi_{k=1}^{n} f(i) = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(n)$$

donde f es una cierta función del índice i.

11. **Propiedades.**

1) $\Pi_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n = n!$
2) $\Pi_{k=1}^{n} k = \Pi_{k=0}^{n-1}(n-k) = n!$
3) $\Pi_{i=1}^{n} a_i = \Pi_{i=1}^{k} a_i \Pi_{i=k+1}^{n} a_i$
4) $\Pi_{i=1}^{n} a_i + \Pi_{i=2}^{n+1} a_i = (a_1 a_{n+1}) \Pi_{i=2}^{n} a_i$
5) $\Pi_{i=k+1}^{n} a_i = \frac{\Pi_{i=1}^{n} a_i}{\Pi_{i=1}^{k} a_i}$
6) $\Pi_{i=1}^{n} c$, c, constante
7) $\Pi_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$ (Propiedad Telescópica)

12. **Ejercicios propuestos.**

1) Examine algunos valores de los productos
$$\text{i)} \quad \Pi_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{k+1}) \quad ; \text{ii)} \quad \Pi_{k=1}^{n}(1 - \frac{1}{(k+1)^2})$$
para valores pequeños de n y conjeture fórmulas generales. Demuestre su conjetura por inducción.
2) Pruebe que
$$(1-x)\Pi_{k=1}^{n}(1 + x^{2^{k-1}}) = 1 - x^{2^n}$$
3) Determine el producto
$$\Pi_{i=1}^{n} 2k$$
y demuestre su resultado por inducción.

13. **Progresiones.**

Definición.

Se dice que los números reales $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ están en progresión Aritmética (P.A) si existe un número real d, llamado diferencia, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} - a_n = d$$

De la definición de P.A tenemos dos importantes resultados, a saber:

1) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_1 + (n-1)d$

2) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

Si en una progresión aritmética el primer término es 2 y la diferencia es 3, se tiene que el segundo término es $2+3\cdot 1$, el tercer término es $2+3\cdot 2$, finalmente el n-ésimo término es $2+3\cdot(n-1)$. Si deseamos sumar los n primeros términos, podemos utilizar la siguiente técnica:

Escribiendo la suma de los términos en orden creciente y luego decreciente en un arreglo por filas y luego sumando tenemos

$$S = 2 + \ 5 + \ 8 \ + ... + \ 3n-4 + \ 3n-1$$

$$S = 3n-1 \ + \ 3n-4 + ... + \ 8 \ + \ 5 \ + \ 2$$

$$2S = 3n-1 \ + 3n-1 \ + 3n-1 \ + ...3n-1 \ + 3n-1 \ = n(3n-1)$$

Luego, $S = \frac{n(3n-1)}{2}$.

El promedio (o bien promedio aritmético) de n números es igual a su suma dividido por n, por ejemplo el promedio de 1,3 y 7 es $\frac{11}{3}$, y si cada término es remplazado por su promedio, la suma de los tres términos permanece inalterable. Cuando tenemos una secuencia de números dados en P.A, el promedio de todos sus términos es igual al promedio del primer término y el último término, que es igual al término central cuando el número de términos es impar.

Por ejemplo, consideremos una progresión aritmética con una diferencia negativa $d = -\frac{5}{3}$

$$\frac{7}{3}, \ \frac{2}{3}, \ \ -1 \ \ -\frac{8}{3}, \ \ -\frac{13}{3}, \ \ -6 \ \ -\frac{23}{3}, \ \ -\frac{28}{3}, \ \ -11$$

Su promedio es $-\frac{13}{3}$ que corresponde al término central y la suma de los nueve términos es igual a nueve veces su promedio, es decir $9 \cdot (-\frac{13}{3}) = -39$.

Si a es el promedio de r y s, es fácil ver que r, a, s son los términos consecutivos de una progresión aritmética. Esta es la razón que el promedio de tres números es llamado el medio aritmético.

Definición.

Se dice que los números reales $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ no nulos están en progresión Geométrica (P.G) si existe un número real q, llamado razón, tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

De la definición de P.G tenemos dos importantes resultados, a saber:

1) $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_1 q^{n-1}$
2) $\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}, \quad q \neq 1.$

En particular si $q = 1$, $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_1$. Luego $\sum_{k=1}^{n} a_k = na_1$.

Si $\mid q \mid< 1$, es fácil ver que las potencias naturales de q son decrecientes y para n suficientemente grande q^n tienden a cero, luego $a_1 + a_2 + a_3 + ... = \frac{a_1}{1-q}$.

Consideremos una progresión geométrica de la forma

$$5, 5 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^4, 5 \cdot 2^6, 5 \cdot 2^8, ...5 \cdot 2^{2n}$$

Podemos identificar que su primer término es $a_0 = 5$, la razón es $q = 2^2$ y el número de términos es $n + 1$.

Ilustremos una forma simple de encontrar la suma de una P.G..

Designemos por S su suma y consideremos el siguiente arreglo

$$S = 5 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^8 + ... + 5 \cdot 2^{2n}$$

multiplicando por 2^2 la anterior igualdad

$$2^2 S = 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^6 + 5 \cdot 2^8 + ... + 5 \cdot 2^{2n} + 5 \cdot 2^{2(n+1)}$$

Restando, notamos que se cancelan los términos menos dos de ellos obteniendo $3S = 5 \cdot 2^{2(n+1)} - 5$, de donde, $S = \frac{5((2^2)^{(n+1)}-1)}{3} = \frac{5(1-(2^2)^{(n+1)})}{1-2^2}$

El medio geométrico de dos números reales positivos a y b se define por $\sqrt{ab}$, el medio geométrico de tres números reales positivos a, b, c se define por $\sqrt[3]{abc}$ y en general para n números reales positivos $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ el medio geométrico se define por

$$\sqrt[n]{\Pi_{i=1}^{n} a_i}$$

Para que una suseción de números $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ esten en P.G, es necesario y suficiente que cada uno de sus términos excepto el primero, sea igual en valor absoluto al medio geométrico de sus términos adyacentes, es decir

$$|a_{n+1}| = \sqrt{a_n a_{n+2}}$$

En efecto, si $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ están en P.G, entonces $a_{n+1} = a_n q$, . Luego $a_{n+2} = a_{n+1} q$, de donde $\sqrt{a_n a_{n+2}} = \sqrt{\frac{a_{n+1}}{q} a_{n+1} q} = \sqrt{a_{n+1}^2} = |a_{n+1}|$.

Para probar la suficiencia, consideremos $|a_{n+1}| = \sqrt{a_n a_{n+2}}$, de donde, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$. Luego $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$.

Obteniendo

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = ... = q$$

lo que demuestra que la sequencia de números $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ están en una P.G.

Se deja como ejercicio al lector, una importante desigualdad que no es fácil de demostrar, ella es:

Para $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ números positivos, se cumple

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n)}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot .... \cdot a_n}.$$

14. **Ejerccios resueltos.**

1) Determine x de manera que $7,\ x,\ 252$ sean tres términos consecutivos de una P.G.
   Como $|x| = \sqrt{7 \cdot 252}$, las soluciones son para $x = 42$ y $x = -42$.
   Otra alternativa para resolver este problema es considerando $x = 7q$, y $7q^2 = 252$, de donde $q = \pm 6$ y $x = \pm 42$.
2) Determine x de manera que $15,\ x,\ 18$ sean tres términos consecutivos de una P.A. La respuesta inmediata es $x = \frac{(15+18)}{2} = \frac{33}{2}$.
   Otra forma para resolver este problema $x = 15 + d$, y $18 = x + d$ de donde $d = \frac{3}{2}$, luego $x = 15 + \frac{3}{2} = \frac{33}{2}$.
3) Dada la suma S_n de los n primeros términos de una P.A $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$, encuentre los cuatro primeros términos si $S_n = \frac{n^2}{4} - n$.
   Respuesta:
   Para $n = 4$, $S_4 = 0$, de donde $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 0$. Luego $d = -\frac{2a_1}{3}$.
   Como $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(2a_1+(n-1)d)}{2} = \frac{n^2}{4} - n$, reemplazando d obtenemos $\frac{na_1(4-n)}{3} = n(\frac{n}{4} - 1)$. Luego $\frac{n(n-4)(3+4a_1)}{2} = 0$ lo que determina que $a_1 = -\frac{3}{4}$.
   Los cuatro términos pedidos son $-\frac{3}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4}$.

15. **Ejercicios propuestos.**

1) Determine en cada fila las cantidades desconocidas utilizando la información dada.

	a_1	d	n	a_n	S_n
(a)	110	-10	11		
(b)	5		26	105	
(c)		3	12		210
(d)		2	15	-10	

	a_1	d	n	a_n	S_n
(a)	-9	0.5			-75
(b)	-28		9		0
(c)	0.2			5.2	137.7
(d)		30	15	15.75	146.25

	b_1	q	n	b_n	S_n
(a)	1	3	10		
(b)		$\frac{1}{2}$	8	2	
(c)	2		7	1458	
(d)		3		567	847
(e)	$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{128}$	$\frac{127}{128}$
(f)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6561}$	
(g)		-3	4		30

2) Si a, b, c, d números que estan en P.G, demuestre que

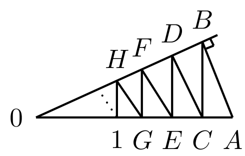
$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$$

3) Una bomba de vacío extrae la cuarta parte del aire contenido en un recipiente, en cada bombeada. ¿ Qué tanto por ciento del aire, que originalmente contenía el recipiente, queda después de cinco bombeadas?.

4) Calcule la suma de los 21 primeros términos de la progresión

$$\frac{(a+b)}{2},\ a,\ \tfrac{(3a-b)}{2}, ...$$

5) En la figura que se adjunta se tiene que
$\overline{OA} = 1mt, \quad \angle AOB = 30^0$.
Calcule $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + ...$



6) En un círculo de radio R se inscribe un cuadrado, en éste cuadrado un círculo, en éste otro círculo un cuadrado y así sucesivamente. ¿ Cuál es el límite de las sumas de las áreas de los cuadrados y de los círculos?

7) En un cierto cultivo, las bacterias se duplican cada 20 minutos. ¿ cuántas veces el número original de bacterias hay en el cultivo al cabo de 2 horas, suponiendo que ninguna muere?

8) De ters números que forman una P.G decreciente , el tercero es 12. Si 12 es reemplazado por 9, los tres números forman una P.A. Encuentre los dos números restantes.

9) Determine una progresión geometrica decreciente e infinita, de manera que su suma sea 3, y la suma de los cubos de sus teminos sea igual a $61\frac{5}{7}$.

10) Utilizando las progresiones, demuestre

$$x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + ... + xy^{n-1} + y^n = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y}$$

16. Teorema del Binomio

Del álgebra elemental, sabemos que $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$, entonces $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ Podemos observar que los coeficientes del binomio cúbico se pueden obtener de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

De aqui podemos tabular los coeficientes de $(a+b)^n$, para $n = 0, 1, 2, 3...$, (para el caso $n = 0$, se requiere que a ó b, no sean nulos simultaneamente.)

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & & & & \longleftarrow & (a+b)^0 \\ & & & 1 & & 1 & & & & \longleftarrow & (a+b)^1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longleftarrow & (a+b)^2 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longleftarrow & (a+b)^3 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longleftarrow & (a+b)^4 \end{array}$$

El arreglo anterior es conocido como triangulo de Pascal, en honor al matematico Blaise Pascal (1623-1662)
Definamos el coeficiente de $a^{n-k}b^k$ (Denominado coeficiente binomial) por

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, donde$k = 0, 1, 2, 3...n$ con $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4...n$ (lease n factorial)
Podemos notar que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$ lo podemos escribir como $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot .....4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

En general $(n+n)! \neq n! + m!$ por ejemplo, si $n = 3$ y $m = 5$, $(3+5)! = 40320$, y $3! + 5! = 126$
Similarmente debemos observar que en general $(2n)! \neq 2n!$ y $(mn)! \neq m!n!$

Utilizando los coeficientes binomiales, el triangulo de Pascal quedaria:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & & \longleftarrow & (a+b)^0 \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \longleftarrow & (a+b)^1 \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \longleftarrow & (a+b)^2 \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \longleftarrow & (a+b)^3 \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \longleftarrow & (a+b)^4 \end{array}$$

17. Ejercicios propuestos

1) Si $n > 1$, demuestre que $n \cdot (n-1)! = n!$

2) Si $n > 2$, demuestre que $(n^2 - n) \cdot (n-2)! = n!$
3) Si $n \geq k$, demuestre que $(n-k+1) \cdot n! + k \cdot n! = (n+1)!$
4) Si $n > 2$, demuestre que $n! - (n-1)! = (n-1)^2 \cdot (n-2)!$
5) Determine todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $(2n)! = 2 \cdot n!$
6) Determine todos los pares de enteros positivos m y n de manera que

$$(m+n)! = n! \cdot m!$$

7) Resuelva la ecuación para n entero positivo $(n+2)! = 90 \cdot n!$
8) Si $0 \leq k \leq n-2$, entonces

$$\binom{n+2}{k+2} = \binom{n}{k+2} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

De la definicion de los coeficientes binomiales para n, m números naturales, $m \geq n$ tenemos las siguientes propiedades

i) $\binom{n}{0} = 1$

ii) $\binom{m}{n+1} = \frac{m-n}{n+1}\binom{m}{n}$

iii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

iv) $\binom{m+1}{n+1} = \frac{m+1}{n+1}\binom{m}{n}$

Teorema del Binomio.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k =$$

$$\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots.. + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

En particular $(a-b)^n$, lo puede considerar como $(a+(-b))^n$ y Es necesario notar por la simetria de los coeficientes que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Definamos por T_j el término j-ésimo en el desarrollo de binomio $(a+b)^n$, entonces

$$T_j = \binom{n}{j-1} a^{n-(j-1)} b^{j-1}$$

luego por razones practicas y no equivocarse en recordar tantos indices , podemos considerar el coeficiente j-ésimo más uno que tiene la forma

$$T_{j+1} = \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) a^{n-j} b^j$$

En particular $(a-b)^n$, lo puede considerar como $(a+(-b))^n$ y es dado por

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^{n-k} (-1)^k b^k$$

Una generalización natural del Teorema del Binomio, es el Teorema del Multinomio, sólo daremos su definición y no entraremos en mas detalles, dejamos al lector más avezado profundizar en esta materia.

Para cualquier entero $n \geq 2$ y para $r \geq 3$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_r)^n = \sum_{n1+n2+...+n_r=n} \left(\begin{array}{c} n \\ n_1, n_2, ..., n_r \end{array} \right) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

donde la suma es sobre toda secuencia de números enteros positivos $n_1, n_2, ..., n_r$ tal que $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$ y

$$\left(\begin{array}{c} n \\ n_1, n_2, ..., n_r \end{array} \right) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$$

En particular para $r = 2$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ n_1, n_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ k, n-k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$$

18. Ejercicios resueltos

1) Calcule el término independiente de x y el término central en caso de que existan en el desarrollo del binomio $(x - \frac{1}{x^2})^9$.

$$T_{j+1} = \left(\begin{array}{c} 9 \\ j \end{array} \right) x^{9-j} (-\frac{1}{x^2})^j = \left(\begin{array}{c} 9 \\ j \end{array} \right) x^{9-j} (-1)^j x^{-2j} = \left(\begin{array}{c} 9 \\ j \end{array} \right) (-1)^j x^{9-3j}$$

Luego para $j = 3$, se tiene que el cuarto término es independiente de x.
Como $n = 9$, no un existe término central.

2) Obtenga el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $(1 + x^2 - x^3)^9$

Como $(x_1 + x_2 + x_3)^9 = \sum_{n_1+n_2+n_3=9} \left(\begin{array}{c} 9 \\ n_1, n_2, n_3 \end{array} \right) x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3}$

y el coeficiente que se pide es para x^8, tenemos la ecuación $2n_2 + 3n_3 = 8$, y las posibilidades son

$$n_1 = 5, \;\; n_2 = 4, \;\; n_3 = 0$$

$$n_1 = 6, \;\; n_2 = 1, \;\; n_3 = 2$$

luego, calculando los coeficientes tenemos

$$\binom{9}{5,4,0}+\binom{9}{6,1,2}=\frac{9!}{5!4!0!}+\frac{9!}{6!1!2!}=252+126=378$$

Otra alternativa para resolver este problema es:
Desarrollando por el teorema del binomio

$$(1+x^2-x^3)^9=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}1^{9-k}(x^2-x^3)^k=\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(x^2-x^3)^k$$

Analicemos las potencias en el desarrollo de $(x^2-x^3)^k$ con $0\le k\le 9$, es decir en

$$(x^2-x^3)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(x^2)^{k-i}(x^3)^i=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^ix^{2k+i}$$

Como $2k+i=8$ y $0\le i\le k$ se tiene $0\le k\le 4$ de donde las posibilidades son: $k=3,\ i=2$; $k=4,\ i=0$ y la suma de los coeficientes de x^8 es

$$\binom{9}{3}\binom{3}{2}+\binom{9}{4}\binom{4}{0}=378$$

3) Demuestre que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}+(-1)^k\binom{n}{k}=2^n$$

En el desarrollo del binomio

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

basta tomar los casos $a=1$,$b=1$ y $a=1$, $b=-1$ para obtener

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

$$(1+(-1))^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$$

4) Determine la suma de todos los coeficientes del polinomio respecto de x que resulta de la expansión binomial de $(3x-4)^{17}$

El desarrollo de $(3x-4)^{17}$ es dado por

$$\sum_{k=0}^{17}\binom{17}{k}(3x)^{17-k}(-4)^k=\binom{17}{0}(3x)^{17}+\binom{17}{1}(3x)^{16}(-4)+$$

$$\binom{17}{2}(3x)^{15}(-4)^2+.....+\binom{17}{16}(3x)(-4)^{16}+\binom{17}{17}(-4)^{17}$$

Dado que esta igualdad es válida para todo x, en particular lo es para $x = 1$. Haciendo $x = 1$ obtenemos la suma de los coeficientes pedida, es decir

$$\binom{17}{0}(3)^{17} + \binom{17}{1}(3)^{16}(-4)+$$

$$\binom{17}{2}(3)^{15}(-4)^2 + ... + \binom{17}{16}(3)(-4)^{16} + \binom{17}{17}(-4)^{17} = (3-4)^{17} = -1$$

19. Ejercicios propuestos

1) En caso de existir, obtenga el coeficiente de x^7 en el desarrollo de $(\frac{2}{x^3}+x+x^3)^8$
2) Determine el coeficiente del término independiente de x en el desarrollo de

$$(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x})^6$$

3) Si en la expansión binomial de

$$(\sqrt{y} + \frac{1}{\sqrt[4]{y}})^4$$

los primeros tres coeficientes forman una progresión aritmética.
Encuentre los términos de la expansión en los cuales los exponentes de y sean números naturales.
4) Si

$$(1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{15}x15$$

determine el valor exacto de a_{10}.
5) Determine una relación entre a y n de modo que en el desarrollo de $(1 + a)^n$ aparezcan dos términos consecutivos iguales.
6) Escriba

$$6\Big[\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + \binom{n}{1}\Big]$$

como un polinomio en n, y utilice el hecho que $\binom{n}{r}$ siempre es un entero para dar una nueva demostración que $n(n^2 + 5)$ es múltiplo de 6 para todo entero n.
7) Determine los números a y b, de manera que para todo natural n

$$n^3 = 6\binom{n}{3} + a\binom{n}{2} + b\binom{n}{1}$$

8) Demuestre por inducción matemática que

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{s+i}{s} = \binom{s+n+1}{s+1}$$

1) Determine un contra ejemplo para la siguiente proposición (Conjetura errada de Isaac Newton 1642-1727)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 11^n = a_0 a_1 a_2 ... a_n \quad \text{donde los dígitos están dados por:}$$

$a_j = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$, $j = 0, 1, 2, 3...n$ con $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4...n$. es fácil demostrar que la proposición es verdadera para $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Sin embargo, para $n = 5$ la proposición no se cumple dado que $11^5 \neq 15101051$.

Observacion. Los coeficientes a_j antes calculados son llamados coeficientes binomiales y su tabulacion en un arreglo triangular se conoce con el nombre de Triángulo de Pascal (ver Figura).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & \longleftarrow & 11^0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \longleftarrow & 11^1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longleftarrow & 11^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longleftarrow & 11^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longleftarrow & 11^4
\end{array}$$