# SERIES DE FOURIER, NOCIONES BÁSICAS

E. SÁEZ

Recordemos que una función $f$, definida en el intervalo cerrado y centrado $[-p, p]$ , $p > 0$ es seccionalmente continua si y sólo si tiene las dos propiedades siguientes:

$$\begin{cases} f \ \text{ es continua en el intervalo, salvo finitos puntos }, a \leq x_1 < \ldots < x_n \leq b \\ \qquad\qquad \text{Las discontinuidades, si existen, son todas de salto .} \end{cases}$$

Geométricamente las gráficas de las funciones seccionalmente continuas son cualitativamente de la forma , por ejemplo como indica la Fig. 1.

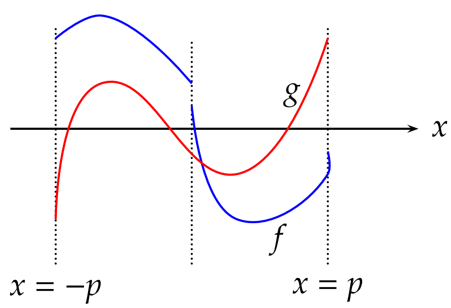



Fig. 1

Designemos por $PC[-p, p] := \{f \mid f : [-p, p] \to \mathbb{R}, p > 0 \}$ , el conjunto de las funciones seccionalmente continuas definidas en el intervalo centrado $[-p, p], p > 0$
Geométricamente, por la interpretación como en la Fig. 1, podemos imaginar que $f \in PC[-p, p]$ es simplemente una curva ( gráfica de una función seccionalmente continua definida en el intervalo $[-p, p], p > 0$).

El estudio de las curvas en $PC[-p, p]$ se pueden comprender mucho, con la ayuda de las ideas que definen un Espacio Vectorial. Estas ideas son esencialmente tres, que se reducen al concepto que los elementos respectivos satisfagan las propiedades naturales de un criterio **de igualdad, un criterio para sumar y un criterio para multiplicar por un número real.**

(i) Criterio de igualdad de curvas seccionalmente continuas.

---

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

Dos funciones $f, g \in PC[-p,p]$ se consideran IGUALES si y sólo si las imágenes , puntualmente coinciden salvo a lo más en finitos puntos. Más exactamente $f = g \Longleftrightarrow f(x) = g(x)$ , $x \in [a,b]$, salvo a lo más finitos puntos.

Nótese que si dos curvas difieren sólo en finitos puntos, según la definición ordinaria del Cálculo son distintas, sin embargo según la definición anterior son iguales. La ventaja de considerar la definición de igualdad anterior es que bajo el punto de vista de la Integral Definida, que la usaremos más adelante, dichas integrales coinciden.

(ii) **¿ Con que criterio SUMAMOS curvas ?** .

La idea es simplemente sumar, en cada punto, las respectivas imágenes. La suma tiene sentido ya que las imágenes son números reales.

Más formalmente , $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ , $\forall x \in [-p,p],\ p > 0.$

La gráfica siguiente, Fig. 2, muestra un ejemplo geométrico, donde la curva más gruesa (roja), representa la suma de las dos curvas más delgadas (azules).

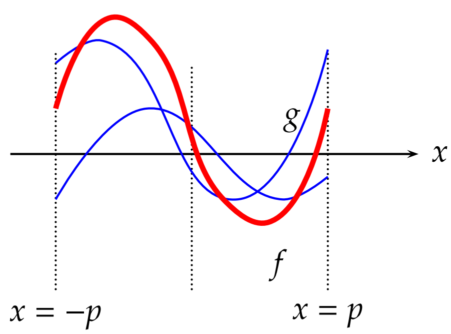



Fig. 2

(iii) **¿ Con que criterio MULTIPLICAMOS las curvas por números reales ?**.

La idea es simplemente multiplicar , en cada punto, las respectivas imágenes ( que son números reales) por el número real que genéricamente lo designaremos por $\lambda$.

Más formalmente , $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ , $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in [-p,p],\ p > 0.$

La gráfica siguiente, Fig. 3, muestra un ejemplo geométrico, donde la curva más gruesa (roja), representa la multiplicación de la curva más delgada (azules) por el número real $\lambda = \frac{1}{2}$.

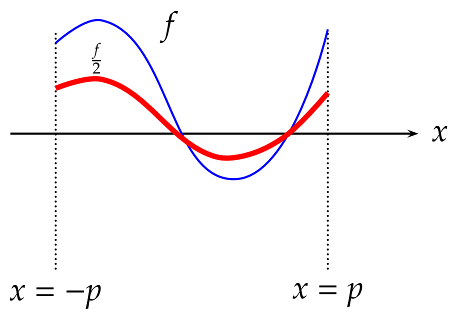



Fig. 3

Los tres criterios anteriores sobre las curvas de $PC[-p,p]$, satisfacen las propiedades usuales de los conceptos más abstractos de igualdad, suma y multiplicación por números reales. Por esta razón bajo el punto de vista del Algebra Lineal, $PC[-p,p]$ forman un Espacio Vectorial Real. Geométricamente, los vectores de este Espacio son las curvas que son gráficas de funciones seccionalmente continuas. Estas curvas juegan el mismo rol que las flechas en el Espacio Vectorial de los segmentos dirigídos y los Escalares del Espacio son los números reales con toda su aritmética usual.

En el Espacio Vectorial de los segmentos dirigídos se introduce un criterio de multiplicación entre segmentos dirigídos conocido con el nombre de Producto Punto. Análogamente en el Espacio Vectorial de curvas de $PC[-p,p]$ vamos a necesitar un criterio de Multiplicación de Curvas. ¿ Como es este criterio ?.

**Definición 1.** *Sean las funciones (geométricamente curvas) $f, g \in PC[-p,p]$, $p > 0$. Entonces se define el Producto de $f$ por $g$ (geométricamente $graf(f)$ por $graf(g)$) por el número real dado por la Integral definida:*

$$< f, g >= \int_{-p}^{p} f(x)g(x)dx$$

El Producto definido por la Integral satisface las propiedades usuales de un producto, por ejemplo:

$$\begin{cases} < f,g > \;=\; < g,f > & \text{conmutatividad} \\ < f,g+h > \;=\; < f,g > + < f,h > & \text{distributividad del producto} \\ & \text{ respecto de la suma} \\ < \lambda f,g > \;=\; \lambda < f,g > \,,\; \lambda \in \mathbb{R} & \text{multiplicación por escalar} \\ < f,f >= 0 \;\Leftrightarrow\; f = \vec{0} & \text{es la función nula con el} \\ & \text{ criterio de igualdad de } PC[-p,p]. \end{cases}$$

**Comentario:** El producto anterior se llama **Producto Interno** y juega el mismo rol que el Producto Punto en el Espacio Vectorial de los segmentos dirigídos.

**Definición 2.** *Dos funciones (geométricamente curvas) no nulas $f, g \in PC[-p,p]$, $p > 0$ son ORTOGONALES respecto del Producto Interno de $PC[-p,p]$ dado por la integral si y sólo si $< f, g >= 0$.*

**Ejemplo 1.** *Las funciones $f, g \in PC[-\pi,\pi]$ tales que $f(x) \equiv 1, g(x) = \operatorname{sen} x$, .o bien las respectivas gráficas:*

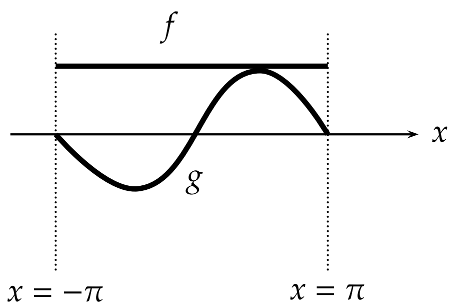



*Fig. 4*

*son ortogonales pues* $< 1, \operatorname{sen} x >= \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x|_{-\pi}^{\pi} = 0$

La definición anterior se generaliza en forma similar para finitas funciones no nulas . Más aun se generaliza para un conjunto infinito de funciones no nulas si cada par de funciones no nulas son ORTOGONALES según la definición anterior.

**Ejercicio Interesante:** El conjunto de infinitas funciones (geométricamente infinitas curvas que son gráficas de las respectivas funciones ) es ORTOGONAL.

$$\mathscr{B} = \left\{ \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{p} \right\}_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}} \tag{1}$$

**Demostración:** Sólo hay que justificar que cada par de funciones diferentes en el conjunto anterior son ORTOGONALES. Por cálculo directo se tiene:

(i) Las funciones Seno y Coseno son ORTOGONALES ya que

$\forall n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$ ; $\displaystyle\int_{-p}^{p} \cos \frac{n\pi x}{p} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{p} dx = 0$ , pues el integrando es impar

(ii) Las funciones Cosenos con diferentes argumentos son ORTOGONALES ya que $\forall n, m \in \mathbb{N}_0$ , $n \neq m$,

$$\begin{aligned} \int_{-p}^{p} \cos \frac{n\pi x}{p} \cos \frac{m\pi x}{p} dx &= \tfrac{1}{2} \int_{-p}^{p} \Big[ \cos \frac{\pi x}{p}(n+m) + \cos \frac{\pi x}{p}(n-m) \Big] dx \\ &= \tfrac{p}{2\pi} \Big[ \tfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{p}(n+m)}{(n+m)} + \tfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{p}(n-m)}{(n-m)} \Big]_{-p}^{p} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(iii) Las funciones Senos con diferentes argumentos son ORTOGONALES ya que $\forall n, m \in \mathbb{N}$ , $n \neq m$,

$$\begin{aligned}
\int_{-p}^{p} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{p} dx &= \tfrac{1}{2} \int_{-p}^{p} \Big[ \cos \frac{\pi x}{p}(n-m) - \cos \frac{\pi x}{p}(n+m) \Big] dx \\
&= \tfrac{p}{2\pi} \Big[ \tfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{p}(n-m)}{(n-m)} - \tfrac{\operatorname{sen} \frac{\pi x}{p}(n+m)}{(n+m)} \Big]_{-p}^{p} \\
&= 0
\end{aligned}$$

**Teorema 1.** *El subconjunto $\mathscr{B}$ en (1) de las funciones (geométricamente curvas) de $PC[a, b]$ con el Producto Interno dado en Definición 1 , es Linealmente Independiente en el sentido del Algebra Lineal.*

Demostración 1: En Algebra Lineal [1] se demuestra que en general, la Ortogonalidad implica la Independencia lineal de vectores, en consecuencia la demostración del teorema es sólo un Corolario particular de un Teorema General.

**Definición 3.** *Un Espacio Vectorial con un Producto Interno se llama Espacio Euclidiano.*

**Teorema 2.** *Sea $\Big\langle \Big\{ \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{p} \Big\}_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}} \Big\rangle$ el Espacio Euclidiano generado por las funciones Seno y Coseno (geométricamente por las respectivas gráficas) en $\mathscr{B}$. Entonces:*

$$PC[-p, p] = \Big\langle \Big\{ \cos \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{p} \Big\}_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}} \Big\rangle$$

Demostración 2: La demostración bajo el punto de vista matemático es interesante, ver por ejemplo [1, 2, 3].

**Es importante** tener claro que el conjunto $\mathscr{B}$ es una **Base Ortogonal infinita** respecto al Producto Interno $< f, g >= \int_{-p}^{p} f(x)g(x)dx$ del Espacio Euclidiano $PC[-p, p]$, $p > 0$. Veremos más adelante que esta propiedad de ortogonalidad permite responder en forma simple preguntas muy importantes sobre las Series de Fourier.

**¿ Cuando dos fuciones diferentes , geométricamente respectivas gráficas, son muy próximas ?**.

Para responder esta pregunta una posibilidad es pensar en el área que queda encerrada por las respectivas gráficas, por ejemplo en la figura 5, se tiene dos situaciones distintas ¿ Cuál par de funciones están mas próximas ?.

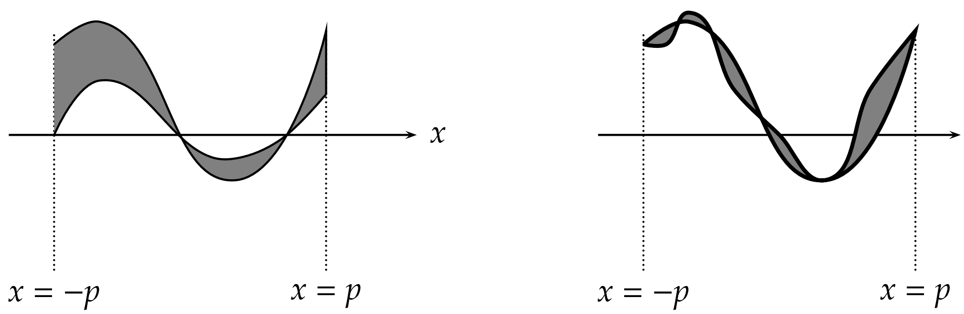



Fig. 5

Para considerar el área encerrada por las curvas simplemente se restan las gráficas y para evitar compensaciones de area de una curva respecto de la otra se toma el cuadrado de las diferencia de las curvas, mas exactamente la integral $\int_{-p}^{p}(f(x)-g(x))^2dx$ nos mide el cuadrado del área encerrada. Entonces se define:

**Definición 4.** *Si $f, g \in PC[-p,p],\ p > 0$ se define,*

$$E(f,g) = \int_{-p}^{p}(f(x)-g(x))^2dx\ .\ \textbf{Error Cuadrático Medio.}$$

Es claro de la interpretación de la integral anterior, que si el error cuadrático medio entre dos funciones es un número muy pequeño, geométricamente significa que sus respectivas gráficas son curvas muy parecidas, por ejemplo el par de funciones en la derecha en la Fig 5 , corresponde a funciones más próximas que el par de funciones en la izquierda de la figura.

**Ejemplo 2.** *Numéricamente , las dos gráficas en la Fig 4 tienen la siguiente proximidad entre ellas $E(1, senx) = \int_{-\pi}^{\pi}(1-\operatorname{sen} x)^2dx = 3\pi$.*

**Ejemplo 3.** *Sean las funciones $f(x) \equiv \frac{1}{2}, x \in [-1,1]$ y $g(x) = \begin{cases} 0 & si \quad -1 \le x < 0 \\ 1 & si \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$*

*¿ Qué funciones se encuentran más* **PRÓXIMAS** *de la función idénticamente nula ?.*

*Respuesta: Conceptualmente la proximidad depende de los valores de los siguientes errores cuadráticos medios:*

$$\begin{aligned} E(0,f) &= \int_{-1}^{1}(0-\frac{1}{2})^2dx = \frac{1}{2} \\ E(0,g) &= \int_{-1}^{1}(0-g(x))^2dx = \int_{0}^{1}(1)^2dx = 1 \end{aligned}$$

*Luego, la función $f$ es más próxima que la función $g$ de la función nula*

Se sabe del Algebra Lineal que todo Vector en un Espacio Vectorial se puede escribir (representar) en forma única como combinación lineal respecto de una Base.

La unicidad significa que el juego de escalares que aparecen en la combinación lineal sólo representan el vector considerado.

La idea anterior se puede considerar en el Espacio Euclidiano $PC[-p, p], \ p > 0$. Sea $f \in PC[-p, p]$, entonces una representación de $f$ respecto de la base (1), es una serie, en lugar de una suma finita, pues la base tiene infinitas funciones. La forma es del tipo

(2) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right) \ , \quad \textbf{Serie de Fourier.}$$

donde es posible demostrar rigurosamente, que los coeficientes de la serie, $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ existen, son únicos, dependen de la función y se pueden determinar perfectamente como veremos más adelante.

**Importante**. La convergencia de la serie 2, es en el Espacio Euclidiano $PC[-p, p], \ p > 0$, geométricamente es en el sentido que las gráficas de las sumas parciales de la serie se aproximan, en el sentido del Error Cuadrático Medio, a una gráfica final cuando el número de término de la suma parcial aumenta indefinidamente.

Más exactamente si se considera la suma parcial de la serie dada por

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right) \ , \ k \geq 1$$

Entonces, es posible demostrar [1, 2, 3], que el Error Cuadrático Medio , entre la función $f$ y las sumas parciales de la serie, es decir, $E(f, S_K) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Geométricamente la proximidad de las gráficas de $f$ y de $S_k$ tienden a coincidir cuando el error tiende a cero. Esta propiedad se llama **Convergencia en Media** de la Serie de Fourier a la función $f$ y se escribe en este sentido la igualdad:

(3) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right) \ , \quad \textbf{Serie de Fourier de f}$$

**Pregunta: ¿ Cuáles son los coeficientes de la Serie de Fourier ?**

Es posible demostrar [1, 2, 3], que bajo el punto de vista operatorio, es invariante efectuar el cálculo correspondiente a multiplicar la Serie de Fourier a efectuar la multiplicación, pero término a término. Considerando esta propiedad y multiplicando segun el Producto Interno $< f(x), \cos \dfrac{m\pi x}{p} >$ con $m \in \mathbb{N}_0$ arbitrario pero fijo, se tiene de (3)

(4) $$< f(x), \cos \frac{m\pi x}{p} > = < \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right), \cos \frac{m\pi x}{p} > \ , \ m \in \mathbb{N}_0$$

O bien , término a término por propiedades del Producto Interno:

$$
\begin{aligned}
< f(x), \cos\frac{m\pi x}{p} > \quad = \quad & \frac{a_0}{2} < 1, \cos\frac{m\pi x}{p} > + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[ a_n < \cos\frac{n\pi x}{p}, \cos\frac{m\pi x}{p} > \\
& + b_n < \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}, \cos\frac{m\pi x}{p} > \Big]
\end{aligned}
$$

Pero por la Ortogonalidad de la base (1) y por cálculo directo:

$$
< \cos\frac{n\pi x}{p}, \cos\frac{m\pi x}{p} > = \int_{-p}^{p} \cos\frac{n\pi x}{p} \cos\frac{m\pi x}{p} dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ 2p & \text{si} \quad n = m = 0 \\ p & \text{si} \quad n = m \geq 1 \end{cases}
$$

Además se sabe del ejercicio interesante parte i) que:
$< \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}, \cos\frac{m\pi x}{p} > = 0$, pues es una integral del producto de una función par por una función impar en el intervalo $[-p, p]$.

Entonces (4) se reduce a la expresión:

$$
\int_{-p}^{p} f(x) \cos\frac{m\pi x}{p} dx = \begin{cases} \frac{a_0}{2} 2p & \text{si} \quad m = 0 \\ a_m p & \text{si} \quad m = n > 0 \end{cases} = a_m p \ , \ m \in \mathbb{N}_0
$$

Luego, los coeficiente $a_m$ , $m \in \mathbb{N}_0$ están dados por

$$
a_m = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos\frac{m\pi x}{p} dx \ \ , \ m \in \mathbb{N}_0
$$

Análogamente, multiplicando (3) según el Producto Interno $< f(x), \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p} >$ con $m \in \mathbb{N}$, arbitrario pero fijo se obtiene:

$$
b_m = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p} dx \ \ , \ m \in \mathbb{N}
$$

Por los cálculos de más arriba y cambiando el índice $m$ por $n$. **Los coeficientes de la serie de Fourier están dados por:**

(5)
$$
\boxed{\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos\frac{n\pi x}{p} dx \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p} dx \quad , \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}}
$$

**Ejemplo 4.** *Sea la función definida por:*

$$
f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x < \pi \\ -1 & si \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases} \in PC[-\pi, \pi] \quad ,
$$

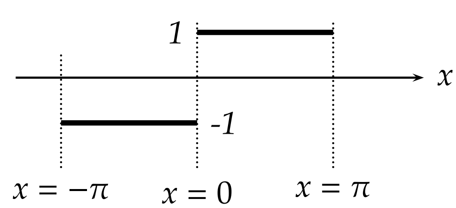



*Fig. 6*

La función $f$ admite una representación en Serie de Fourier del tipo (3) con $p = \pi$, de la forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \Big)$$

Sólo falta calcular los coeficientes de Fourier (5). Entonces:

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0$, pues $f$ es una función impar y la función Coseno es par en el intervalo $[-\pi, \pi]$, respectivamente. Luego el integrando es impar en el intervalo.

Para el cálculo del coeficiente $b_n$, nótese que el integrando es una función par en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces la integral se reduce

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{n\pi} \Big[ -\cos n\pi + 1 \Big] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{si} \quad n = 2k-1 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si} \quad n = 2k \quad , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Entonces, la representación en Serie de Fourier de $f$, en el sentido de convergencia en media está dada por:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{\pi} \Big[ \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots + \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1} + \dots \Big] \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1} \end{aligned}$$

La interpretación del error cuadrático medio ( convergencia en media), para gráficas de las sumas parciales $S_k, k = 1, 2$ y $k = 4$ se muestra en las siguientes figuras:

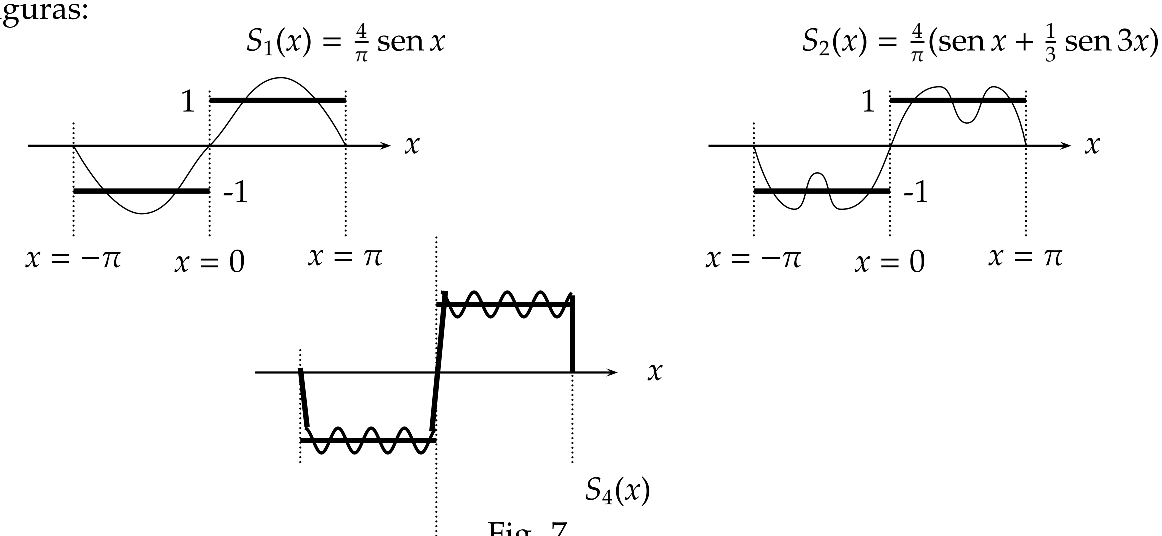



Fig. 7

**Comentario** La igualdad entre una función y su Serie de Fourier en (3) en el sentido usual de funciones, es decir, unicidad de imágen para cada elemento en el dominio, en general no es verdadera. Con el objeto de tener un resultado para igualdad en el sentido usual de funciones, es necesario reducir el conjunto de funciones.

**Definición 5.** *Una función $f \in PC[-p,p], p > 0$ se llama Seccionalmente Suave, si y sólo si tiene derivada Seccionalmente Continua en el intervalo* $[-p,p]$

La idea geométrica de la definición anterior es que una función con derivada continua, salvo a lo más finitos puntos, es Seccionalmente Continua si no tiene asíntotas verticales en el intervalo $[-p,p], p > 0$. Tiene a lo más finitas discontinuidades, todas de primera clase en el intervalo.

**Teorema 3. (Convergencia punto por punto ).** *Sea una función Seccionalmente Suave $f \in PC[-p,p], p > 0$. Entonces su serie de Fourier, evaluada en un punto fijo $x_0 \in [-p,p]$ es una serie numérica que tiene la suma:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x_0}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x_0}{p}\Big) \equiv \begin{cases} \dfrac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} & si \quad x_0 \in (-p,p) \\ \dfrac{f(-p^+)+f(p^-)}{2} & si \quad x_0 \in \{-p,p\} \end{cases}$$

*Los coeficientes de la serie $a_0, a_n, b_n$ son los de Fourier de $f$.*

Demostarción: La demostración tiene interés matemático y se puede ver por ejemplo en [1, 2, 3].

Geométricamente, el Teorema 3 de la Convergencia puntual dice:

i) Si $x_0$ es un punto de Continuidad de la función $f$ en el intervalo abierto $(-p,p)$. Entonces la gráfica local de la serie numérica de $f$, alrededor del punto $x_0$ es cualitativamente de la forma:

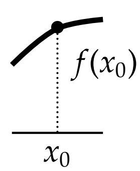



Fig 8

La suma de la serie numérica en el punto coincide con la imágen del punto.

ii) Si $x_0$ es un punto de Discontinuidad de Salto de la función $f$ en el intervalo abierto $(-p,p)$. Entonces la gráfica local de la serie numérica de $f$, alrededor del punto $x_0$ es cualitativamente de la forma:

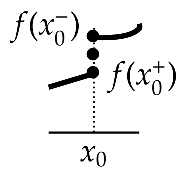
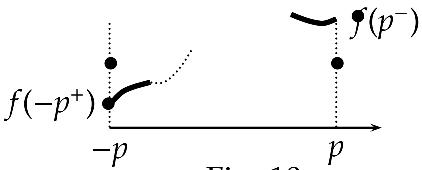



Fig. 9

La suma de la serie numérica en el punto coincide con el punto medio del salto de la función en el punto.

.

iii) Si $x_0$ es el punto $-p$, o bien, el punto $p$, extremos del intervalo cerrado $[-p, p]$. Entonces la gráfica local de la serie numérica de $f$, alrededor del punto $x_0$ es cualitativamente de la forma:




La suma de la serie numérica en los extremos del intervalo coincide con el punto medio del salto de la función en los extremos del intervalo.

Fig. 10

**Ejemplo 5.** *Se sabe del ejemplo 4 que la gráfica de la función* $f \in PC[-\pi, \pi]$ *es:*

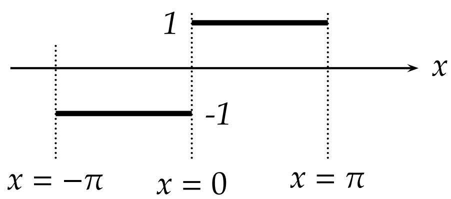



*Fig. 11*

*Es inmediato que la función* $f$ *es seccionalmente suave. Por el Teorema 3 su Serie de Fourier converge puntualmente y su suma está dada por:*

$$\frac{4}{\pi}\Big[\operatorname{sen} x_0 + \frac{\operatorname{sen} 3x_0}{3} + \dots + \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x_0}{2k-1} + \dots\Big] \equiv \begin{cases} \dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} & si \quad x_0 \in (-\pi, \pi) \\ \dfrac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} & si \quad x_0 \in \{-\pi, \pi\} \end{cases}$$

*En particular,* $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *es un punto de continuidad de la función. Entonces la Serie de Fourier evaluada en este punto es una serie numérica que tiene la suma:*

$$1 \equiv \frac{4}{\pi}\Big[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots\Big] \quad \textit{o bien}, \ \frac{\pi}{4} \equiv 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots,$$

*Comentario: La suma de la serie numérica anterior, es una pregunta difícil de conseguir sin el concepto de Serie de Fourier.*

Se sabe que las funciones seno y coseno son periódicas en el intervalo $(-\infty, \infty)$, en consecuencia satisfacen las siguientes identidades:

$$(6) \qquad \begin{array}{|lllll} \cos \dfrac{n\pi}{p}(x - 2p) & \equiv & \cos(\dfrac{n\pi x}{p} - 2n\pi) & \equiv & \cos \dfrac{n\pi x}{p} \\ \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{p}(x - 2p) & \equiv & \operatorname{sen}(\dfrac{n\pi x}{p} - 2n\pi) & \equiv & \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{p} \\ \hline \end{array} \quad , \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Sea una función seccionalmente suave, tal que la suma de la serie en cada punto (redefiniendo si es necesario las imágenes), coincida con los puntos medios de los saltos en los finitos puntos de dicontinuidad y tambien con los puntos medios de los saltos en los extremos del intervalo $[-p, p]$ respectivamente (Teorema 3). Entonces en el sentido de convergencia puntual

$$f(x) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right) \quad , \quad [-p, p] \; p > 0$$

Sea en la identidad anterior, la traslación en sentido positivo del eje de las abscisas, $x \to x - 2p$, entonces:

$$f(x-2p) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi}{p}(x-2p) + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p}(x-2p) \right] \quad , \quad [p, 3p] \; p > 0$$

Pero por las identidades (6), la expresión anterior se reduce:

$$f(x-2p) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{p} x \right] \equiv f(x) \quad , \quad [p, 3p] \; p > 0$$

La interpretación del desarrollo anterior, geométricamente significa que la gráfica trasladada de $f$, al intervalo $[p, 3p]$ es sólo una traslación de la gráfica de $f$, o bien, una traslación en $p$ unidades en sentido positivo del eje de las abscisas, de la gráfica de la Serie de Fourier en el intervalo $[-p, p]$.

Análogamente se puede considerar la traslación a izquierda, $x \to x + 2p$ del eje de las abscisas y se obtiene $f(x) \equiv f(x + 2p)$ en el intervalo $[-3p, -p]$, es decir, la gráfica trasladada de $f$ al intervalo $[-3p, -p]$ es sólo una traslación de la gráfica de $f$, o bien, es una traslación en sentido negativo del eje de las abscisas, de la gráfica de la Serie de Fourier en el intervalo $[-p, p]$.

La situación descrita es más general. Como las identidades (6) se satisfacen $\forall n \in \mathbb{N}_0$, entonces repitiendo el argumento descrito para la traslación ;
$x \to x - 2np \;,\; \forall n \in \mathbb{Z}_0$ se tiene que $f(x) \equiv f(x - 2np), n \in \mathbb{Z}_0$, en el intervalo $[(2n-1)p, (2n+1)p], \forall n \in \mathbb{Z}_0$.

Finalmente la gráfica de $f$, o bien, la gráfica de la Serie de Fourier (que es la misma de $f$) se repite por periocidad en cada intervalo de la forma
$[(2n-1)p, (2n+1)p], \forall n \in \mathbb{Z}_0$.

Luego si $f \in PC[-p, p], p > 0$, secionalmente suave, por la convergencia puntual se puede definir, usando la Serie de Fourier, una extensión periódica a todo los números Reales

$$F : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R} \quad , \quad \text{tal que} \; , \; F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \right)$$

Los coeficientes de la serie $a_0, a_n, b_n; n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de Fourier de $f$. La función $F$ se llama **Existencia Periódica** de $f$. La figura siguiente ilustar cualitativamente, por ejemplo como son las gráficas de $F$.

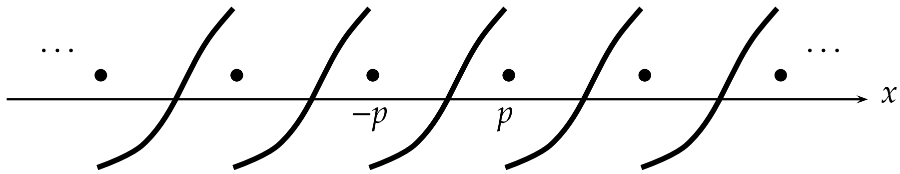



Fig 12

**Ejemplo 6.** *Consideremos la gráfica de la función del ejemplo 4. Entonces la gráfica de la existencia periódica de $f$ es de la forma:*

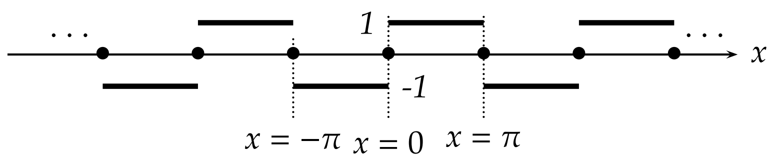



*Fig. 13*

**Comentario:** En las aplicaciones de las Series de Fourier, todos los instrumentos diseñados para comprender funciones que modelan fenómenos aplicados, muestran las existencias periódicas de las respectivas Series de Fourie. Por ejemplo en medicina para entender el funcionamiento del corazón se usa los Electrocardiogramas.

Del Algebra Lineal, se sabe que las representaciones de vectores en términos de una base son **únicas**. En consecuencia las series de Fourier, o bien, las respectivas existencias periódicas de las Series de Fourier son **únicas**. Esta propiedad permite conocer la Existencia Periódica de una función con un mínimo de cálculo. Por ejemplo, en la Trigonometría es muy conocida la identidad;

$$\operatorname{sen}^2 x \equiv \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Si se interpreta esta identidad bajo el punto de vista de las Series de Fourier, se tiene que el segundo miembro es una Serie en términos de las funciones $\cos 0$ y $cos 2x$ que son sólo dos funciones con coeficientes no nulos. Los coeficientes de Fourier restantes $a_n, n \neq 2$ y $n \neq 0$ y $b_n, n \in \mathbb{N}$ **son todos nulos**. Luego por la **unicidad** de las Series de Fourier, el segundo miembro de la identidad es la Serie de Fourier de la función $f(x) = sen^2 x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. La existencia periódica de la función es la gráfica

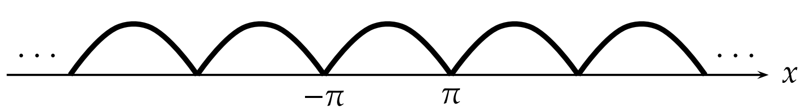



Fig. 14

**¿ Pregunta Interesante ?** Supongamos una función seccionalmente suave pero definida en un **intervalo no centrado** respecto del origen, $f:[0,p]\to\mathbb{R}$ , $p>0$. Interesa por alguna razón una representación en Serie de Fourier. Una respuesta posible es intentar repetir la idea desarrollada en (2), donde el intervalo considerado está centrado respecto del origen.

El problema se reduce a considerar una extensión de $f$, de tal suerte que la extensión este definida en un **intervalo centrado respecto del origen** de la forma $[-p,p], p>0$. Geométricamente la pregunta planteada es la siguiente:

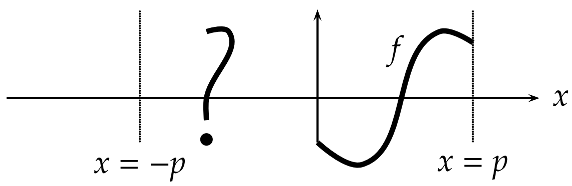



Fig. 15

Existen infinitas posibilidades de extensiones de $f$ a un intervalo centrado respecto del origen. Con el objeto de simplificar cálculos, se consideran extensiones seccionalmente suaves, de tal suerte que la extensión presente una simetría en el intervalo $[-p,p]$ , $p>0$,

Caso 1 **Extensión Impar**

Sea la extensión definida por $I(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } 0<x\le p \\ -f(-x) & \text{si } -p\le x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ , $p>0$

La extensión es Impar en el intervalo $[-p,p]$. Geométricamente su gráfica tiene simetría central respecto del origen y es cualitativamente del tipo:

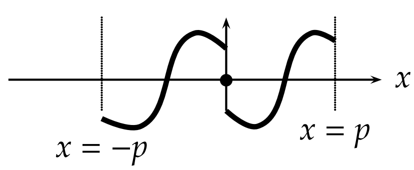



Fig. 16

La extensión impar $I\in PC[-p,p]$ es seccionalmente suave en el intervalo pues $f$ es seccionalmente suave en $[0,p]$ y en el intervalo $[-p,0]$ es la curva simétrica respecto del origen. Luego el número de discontinuidades de salto es finito (a lo más el doble más uno de las discontinuidades de $f$).

Como $I\in PC[-p,p], p>0$, por la convergencia puntual, la extensión Impar tiene una Serie de Fourier cualitativamente del tipo

$$I(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p}+b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{p}\right)$$

La igualdad: por ser $I \in PC[-p,p], p > 0$ es en el sentido del error cuadrático medio (convergencia en media) como tambien en el sentido de convergencia puntual pues $I$ es seccionalmente suave en el intervalo $[-p,p], p > 0$.

Los coeficientes por cálculo directo están dados por:
$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} I(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = 0$ , $n \in \mathbb{N}_0$, pues el integrando por la extensión impar, es claramente una función impar en el intervalo centrado respecto del origen. Este cálculo dice que la Serie de Fourier no contiene ni término constante (corresponde a Coseno de cero) ni funciones Coseno.

Los coeficientes por cálculo directo de las funciones Seno son:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} I(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx \ , \ n \in \mathbb{N} \ ,$$

pues $I(x)|_{[0,p]} \equiv f(x)$ y el integrando por la extensión Impar es Par en el intervalo centrado respecto del origen.

Finalmente, por la convergencia puntual de la Serie, se tiene la representación Senoidal de la función $f$ en el intervalo no centrado $[0,p]$ , $p > 0$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p} \quad , \quad x \in [0,p] \\ b_n & = & \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx \end{array} \right. \tag{7}$$

Observación: La igualdad anterior **no es en el sentido vectorial** del error cuadrático medio (Convergencia en media) en el Espacio Vectorial $PC[-p,p]$ pues $f$ no es un vector del espacio ya que $dom(f) = [0,p] \neq [-p,p]$.

Caso 2 **Extensión Par**

Sea la extensión definida por $P(x) = \left\{ \begin{array}{lll} f(x) & \text{si} & 0 \le x \le p \\ f(-x) & \text{si} & -p \le x < 0 \end{array} \right.$ , $p > 0$ La extensión es Par en el intervalo $[-p,p], p > 0$. Geométricamente su gráfica tiene simetría axial respecto del eje de las ordenadas y es cualitativamente del tipo:

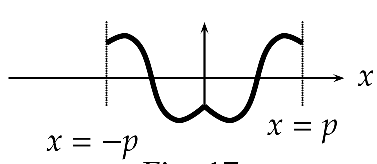



Fig. 17

La extensión par $P \in PC[-p,p], p > 0$ es seccionalmente suave en el intervalo pues $f$ es seccionalmente suave en $[0,p]$ y en el intervalo $[-p,0]$ es la curva simétrica respecto del eje de las ordenadas. Luego el número de discontinuidades de salto es finito (a lo más el doble más uno de las discontinuidades de $f$).

Como $P \in PC[-p,p], p > 0$ y por la convergencia puntual de $P$, la extensión Par tiene una Serie de Fourier del tipo

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\Big)$$

La igualdad: por ser $P \in PC[-p,p], p > 0$ es en el sentido del error cuadrático medio (convergencia en media) como tambien en el sentido puntual pues $P$ es seccionalmente suave en el intervalo $[-p,p]$.

Los coeficientes por cálculo directo están dados por:

$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} P(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = 0$ , $n \in \mathbb{N}$ pues el integrando por la extensión Par, es claramente una función impar en el intervalo centrado respecto del origen. Este cálculo dice que la Serie de Fourier no contiene funciones Seno.

Los coeficientes por cálculo directo de las funciones Coseno son:

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} P(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\ ,$$

pues $P(x)|_{[0,p]} \equiv f(x)$ y el integrando por la extensión Par es Par en el intervalo centrado respecto del origen.

Finalmente, por la convergencia puntual de la Serie, se tiene la representación Cosenoidal de la función $f$ en el intervalo no centrado $[0,p]$ , $p > 0$

(8)
$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{p}\quad ,\quad x \in [0,p] \\ a_n & = & \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx\ ,\ n \in \mathbb{N}_0 \end{array}\right.$$

Observación: La igualdad anterior **no es en el sentido vectorial** del error cuadrático medio (Convergencia en media) en el Espacio Vectorial $PC[-p,p]$ pues $f$ no es un vector del espacio ya que $dom(f) = [0,p] \neq [-p,p]$.

Los coeficientes por cálculo directo de las funciones Seno son:

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} I(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx\ ,\ n \in \mathbb{N}\ ,$$

pues $I(x)|_{[0,p]} \equiv f(x)$ y el integrando por la extensión Impar es Par en el intervalo centrado respecto del origen.

Finalmente, por la convergencia puntual de la Serie, se tiene la representación Senoidal de la función $f$ en el intervalo no centrado $[0,p]$ , $p > 0$

(9)
$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\quad ,\quad x \in [0,p] \\ b_n & = & \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx \end{array}\right.$$

Observación: La igualdad anterior **no es en el sentido vectorial** del error cuadrático medio (Convergencia en media) en el Espacio Vectorial $PC[-p,p]$ pues $f$ no es un vector del espacio ya que $dom(f) = [0,p] \neq [-p,p]$.

Caso 3 Extensión sin simetría

Cualquier extensión sin simetría, seccionalmente suave al intervalo centrado respecto del origen , genera una Serie de Fourier con términos no nulos tanto de funciones Seno como Coseno. Por la convergencia puntual se puede considerar conceptualmente la restricción de la extensión al intervalo no centrado respecto del origen $[0,p]$ , $p > 0$ y se tiene nuevas representaciones de $f$ en término de Senos y Coseno.

Observación: Las diferentes representaciones de $f$ en el intervalo $[0,p]$ , $p > 0$ no son en el sentido de Fourier como una combinación lineal respecto de una base (punto de vista vectorial) pues $f$ no es un vector del Espacio Vectorial $PC[-p,p]$.

**Ejemplo 7.** *Sea la función $f(x) = \pi \quad , -\pi \leq x \leq 0$. Considere una extención F al intervalo $[-\pi,\pi]$, de tal suerte que la función $f$ tenga una representación en serie Senoidal de Fourier.*

*Respuesta: Para conseguir una representación de $f$, en Serie Senoidal de Fourier es necesario considerar una Extensión Impar F al intervalo $[-\pi,\pi]$, en efecto sea la extensión Impar:*

$$F(x) = \begin{cases} \pi & si \quad -\pi \leq x < 0 \\ -\pi & si \quad 0 < x \leq \pi \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

*Entonces, F tiene una representación Senoidal de Fourier en el intervalo centrado respecto del origen $[-\pi,\pi]$, $F(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$ , donde la convergencia de la serie es tanto en el sentido de convergencia en media como en el sentido puntual. Los coeficientes Senoidales son:*

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} -\pi \operatorname{sen} nx dx = \frac{2}{n}\Big[cos n\pi - 1\Big] = \frac{2}{n}\Big[(-1)^n - 1\Big]$$

*Luego,* $b_n = \begin{cases} 0 & si \quad n = 2k \ , \ k \in \mathbb{N} \\ -\dfrac{4}{n} & si \quad n = 2k-1 \end{cases}$ *. Por la convergencia puntual de la serie:*

$$f(x) = \pi = -4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k-1)x}{2k-1}, \text{ en el intervalo } [-\pi, 0]$$

*Observación: Nótese que $S_1(X) = -4 \operatorname{sen} x$, es una primera aproximación de la extensión Senoidal de F.*

Consideremos una pregunta más general sobre representaciones de funciones seccionalmente suaves, definidas en intervalos más arbitrarios de la forma $[a,b]$ , $a < b$. La idea de una respuesta a esta pregunta es considerar la existencia periódica de la función y luego buscar un intervalo centrado respecto del origen de tal suerte que la respectiva existencia periódica coincida, puntualmente con la función en el intervalo $[a, b]$

Supongamos una función seccionalmente continua y seccionalmente suave $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ donde $a < b$. Geométricamente su gráfica, por ejemplo cualitativamente es de la forma:

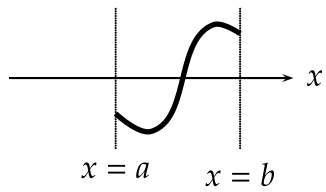


Fig. 18

Sea $F : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, la existencia periódica de $f$. En el intervalo centrado respecto del origen, $[-\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{2}]$ no necesariamente se tiene una representación de la gráfica de $f$ pues el intervalo $[a, b]$ repetido por periocidad, no necesariamente coincide con un intervalo centrado respecto del origen. Supongamos por ejemplo que la situación es la siguiente:

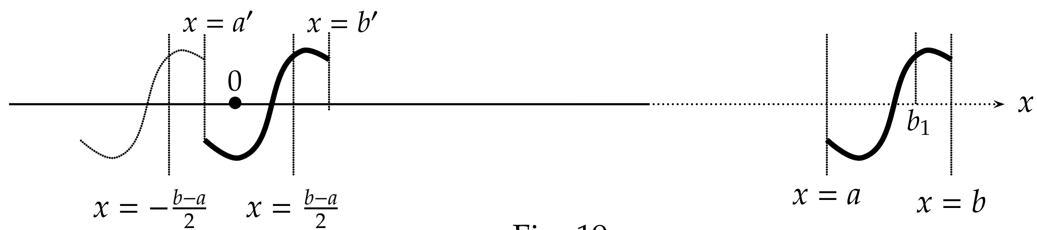


Fig. 19

Para $p = \dfrac{b-a}{2}$, en el intervalo centrado respecto del origen $\Big[-\dfrac{b-a}{2}, \dfrac{b-a}{2}\Big]$, la extencia periódica $F$ de $f$, restrigida al intervalo es seccionalmente continua y seccionalmente suave pues por hipótesis $f$ tiene ambas propiedades. Entonces por (3), admite Serie de Fourier y es de la forma:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos \frac{2n\pi x}{b-a} + b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{b-a}\Big)$$

La convergencia de la Serie es tanto en convergencia en media como puntual. Los coeficientes de la Serie están dados por (5) y son:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} F(x) \cos \frac{2n\pi x}{b-a} dx \ , \ \ n \in \mathbb{N}_0 \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} F(x) \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{b-a} dx \ , \ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx &= \int_{-\frac{b-a}{2}}^{a'} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx + \int_{a'}^{\frac{b-a}{2}} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx \\
&= \int_{b_1}^{b} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx + \int_{a}^{b_1} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx \\
&= \int_{a}^{b} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx
\end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{a'} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx + \int_{a'}^{\frac{b-a}{2}} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx$$

$$\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx = \int_{b_1}^{b} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx + \int_{a}^{b_1} F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx \ ,$$

Pues en la Fig 19, la curva en el intervalo $[-\frac{b-a}{2}, a']$ es la misma curva que en el intervalo $[b_1, b]$. La curva en el intervalo $[a', \frac{b-a}{2}]$ es la misma curva que en el intervalo $[a, b_1]$

Luego, $a_n = \dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b F(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx = \dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx \ , \ n \in \mathbb{N}_0$

Análogamente, el coeficiente Senoidal de Fourier está dado por:

$b_n = \dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b F(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{b-a}dx = \dfrac{2}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{b-a}dx \ , \ n \in \mathbb{N}$

En forma similar se demuestra otros casos sobre la posición del intervalo $[a, b]$ , $a < b$, repetido por periocidad, respecto de una posición centrada en el origen del sistema de coordenadas.

La tabla siguiente resumen las fórmulas del caso general:

$$\boxed{\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a} + b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{b-a}\right) \\
a_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx \ , \ n \in \mathbb{N}_0 \\
b_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{sen}\,\frac{2n\pi x}{b-a}dx \ , \ n \in \mathbb{N}
\end{aligned}}$$

Comentario: Se sabe de un curso de Cálculo Real, que el término general de una serie numérica converge a cero. Esta propiedad es una condición necesaria para la convergencia de la serie numérica. Análogamente el término general de una serie de Potencias tiene líte cero, condición necesaria para la convergencia de la serie de Potencias.

**Pregunta: ¿ Propiedades de los coeficientes de las series de Fourier ?**

**Teorema 4.** *(***Desigualdad de Bessel***) Sea $f \in PC[-p,p]$, una función seccionalmente continua en el intervalo centrado $[-p,p], p > 0$. Entonces:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f^2(x)dx \; .$$

*Donde $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, son los coeficientes de Fourier de la serie de Fourier de $f$.*

**Demostración:** *De (3) y (5) se tiene que en el sentido de convergencia en media la función $f$ se puede representar por una serie de Fourier en el intervalo $[-p,p], p > 0$,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p}\right)$$

*Sea $S_k(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{k} \left(a_n \cos \dfrac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{p}\right)$, la suma parcial de la serie de Fourier para $k \geq 1$. Entonces por el error cuadrático medio, propiedades del Producto Interno del Espacio Euclidano $PC[-p,p]$ y la ortogonalidad en (1) se tiene:*

$$\begin{aligned}
0 \leq E(f, S_K) \;&\equiv\; \|f(x) - S_k(x)\|^2 \equiv < f(x) - S_k(x), f(x) - S_k(x) > \\
&\equiv\; < f(x), f(x) > -2 < f(x), S_k(x) > + < S_k(x), S_k(x) > \\
&\equiv\; \textstyle\int_{-p}^{p} f^2(x)dx - 2\Big[ < f(x), \frac{a_0}{2} > + \sum\limits_{n=1}^{k} < f(x), a_n \cos \frac{n\pi x}{p} > + \\
&\quad\; \textstyle\sum\limits_{n=1}^{k} < f(x), b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} > \Big] + < \frac{a_0}{2}, \frac{a_0}{2} > + \\
&\quad\; \textstyle\sum\limits_{n=1}^{k} a_n^2 < \cos \frac{n\pi x}{p}, \cos \frac{n\pi x}{p} > + \sum\limits_{n=1}^{k} b_n^2 < \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} >
\end{aligned}$$

*Pero por la Ortogonalidad de la base de funciones Senos y Cosenos del espacio Euclidiano $PC[-p,p], p > 0$*

$$\begin{cases}
\frac{a_0}{2} \equiv \dfrac{< f, 1 >}{2p} & \Rightarrow \;\; <, f, 1 > \equiv a_0 p \\
a_n \equiv \dfrac{< f(x), \cos \frac{n\pi x}{p} >}{p} & \Rightarrow \;\; < f(x), \cos \frac{n\pi x}{p} \equiv a_n p \;,\; n \in \mathbb{N} \\
b_n \equiv \dfrac{< f(x), \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} >}{p} & \Rightarrow \;\; < f(x), \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{p} \equiv a_n p \;,\; n \in \mathbb{N}
\end{cases}$$

*Reemplazando estas últimas identidades en el desarrollo de más arriba:*

$0 \leq \int_{-p}^{p} f^2(x)dx - 2\Big[\dfrac{a_0^2}{2}p + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^2 p + \sum\limits_{n=1}^{k} b_n^2 p\Big] + \dfrac{a_0^2}{4} 2p + \sum\limits_{n=1}^{k} a_n^2 p + \sum\limits_{n=1}^{k} b_n^2 p$ *, o bien,*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} \left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f^2(x)dx \;\;, \;\; \forall k \geq 1$$

*Nótese que la integral del segundo miembro de la desigualdad anterior es independiente de k. Entonces interpretando el resultado, el segundo miembro es una cota superior para la serie numérica del primer miembro de términos no negativos.*

*Luego por un Teorema conocido de convergencia de series numéricas del cálculo real, la serie numérica de los coeficientes de Fourier converge y tiene suma menor o igual que la cota superior, es decir se tiene la desigualdad de Bessel*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \leq \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)dx$$

**Comentario Importante** De la demostración anterior del Teorema 4, sobre la desigualdad de Bessel, se deduce la equivalencia:

$$E(f, S_k) \equiv \int_{-p}^{p} f^2(x) - p\Big[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n^2 + b_n^2)\Big]\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Entonces es clara la siguiente identidad: El error cuadrático medio, $E(f, S_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$ si y sólo si, $\forall f \in PC[-p, p], p > 0$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \equiv \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f^2(x)dx\ ,\ \textbf{IdentidaddeParseval}$$

La afirmación anterior tambien se puede interpretar como:
$\mathscr{B} = \left\{\cos\frac{n\pi x}{p}, \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{p}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0, m\in\mathbb{N}}$ es una base del Espacio Euclidiano $PC[-p, p], p > 0$ si y sólo si la identidad de Parseval se satisface $\forall f \in PC[-p, p], p > 0$

Otra conclusión sobre los coeficientes de Fourier es la obtenida por Riemann: Bajo la hipótesis del Teorema 4 de la desigualdad de Bessel, la serie numérica de los coeficientes de Fourier, $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ converge. Se sabe del Cálculo real que el término general de una serie numérica converge cuando el índice del término general tiende a infinito. Más exactamente:

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0\ ,\ \text{más explícitamente :}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}dx = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx = 0 \end{cases}$$

Es inmediato que los límite son independiente del factor $\frac{1}{p}$, entonces se tiene que los límites de las integrales son cero.

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-p}^{p} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{p}dx = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\,\dfrac{n\pi x}{p}dx = 0 \end{array}}$$

**Teorema de Riemann**

La propiedad, del valor cero de los límites de los coeficientes de Fourier, para Series de Fourier bajo la hipótesis de convergencia, (análogamente a las series numéricas) es una**condición necesaria** para la convergencia de una Serie de Senos y Cosenos. Esto significa, bajo el punto de vista de la lógica matemática, que si se tiene una Serie de términos en Senos y Coseno , no necesariamente es de Fourier.

**Contraejemplo** Sea la función del ejemplo 5, redefiniendo si es necesario, como nulas las imágenes de los puntos $-\pi, 0, \pi \in [-\pi, \pi]$, bajo el punto de vista del Cálculo Real, por el Teorema 3 se tiene la equivalencia puntual para funciones, $f(x) \equiv \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)x}{2n-1}$. Si derivamos la identidad término a término en el caso de la serie, en puntos diferentes del origen en el intervalo abierto $(-\pi.\pi)$ se obtiene operatoriamente la derivada $f'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)x$. Pero los coeficientes de la serie Cosenoidal son $a_n \equiv \frac{4}{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}$ , de donde es inmediato que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{\pi} \neq 0$. Luego la serie Cosenoidal de la derivada de la función ´!´! No es una serie de Fourier !!. Veremos en lo que continua una explicación del porqué ocurre esta situación falsa.

**Pregunta** ¿ Bajo que condiciones es verdadero derivar (integrar), término a término, una Serie de Fourier ?

**Teorema 5.** *(Derivación término a término) Sea $f \in C(-\infty, \infty)$ una función continua y periódica de período $2p > 0$, con derivada $f'$ seccionalmente continua en el intervalo $[-p, p], p > 0$. Entonces la serie de Fourier de $f'$ es la serie de Fourier de $f$, derivada término a término. Además la serie de Fourier de $f'$, converge puntualmente si la segunda derivada $f''$ existe.*

*Demostración: La demostración es de interés matemático y el lector puede consultar* [1, 2, 3]

Comentario: La hipótesis de Continuidad de la función es esencial. Sin esta hipótesis se puede tener, por ejemplo, la función definida en el ejemplo 5, que tiene una discontinuidad de salto en el origen. Sabemos por el contraejemplo descrito más arriba que la derivación término a término de la Serie de Fourier de la función, en este caso, no es una serie de Fourier .

**Teorema 6.** *(Integración término a término ) Sea $f \in PC[-p,p], p > 0$, una función seccionalmente continua definida en el intervalo $[-p,p], p > 0$ y en el sentido de convergencia en media la representación en Serie de Fourier en el intervalo*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}\right)$$

*Entonces la función definida por: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , $x \in (-p,p)$ admite representación en Serie de Fourier que converge puntualmente en el intervalo abierto $(-p,p)$. Además la Serie de Fourier está dada por*

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \frac{p}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos\frac{n\pi x}{p} + [a_n + (-1)^{n+1}a_0]}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}$$

*Demostración: La demostración es de interés matemático y el lector puede consultar* [1, 2, 3]

Comentario: Es recomendable no usar directamente la fórmula del Teorema 6. En un caso concreto es preferible integrar directamente término a término la Serie de Fourier de la función $f$. Po ejemplo, la integración directa del término constante entrega el resultado:
$\int_0^x \frac{a_0}{2}dt = \frac{a_0}{2}x$ , $x \in (-p,p)$. Pero $\dfrac{x}{2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{p}$, por ser el integrando una función impar en el intervalo $[-p,p], p > 0$. Calculando el coeficiente $\beta_n = \frac{2}{p}\int_0^p \dfrac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{p}dx$, se obtiene por cálculo directo que $\beta_n = \dfrac{p}{n\pi}(-1)^{n+1}$, de donde la integral del término constante está dada por: $\int_0^x \dfrac{a_0}{2}dt = \dfrac{a_0 p}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{p}$ , $x \in (-p,p)$

Ejemplo: Sea la función , $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases} \in PC[-\pi,\pi]$ . Por el ejemplo 5, se sabe que la representación, en el sentido de convergencia en media, está dada por la Serie de Fourier Senoidal: $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$. Entonces, integrando término a término:

$$\int_0^x f(\xi)d\xi = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\xi}{(2n-1)^2}\Big|_0^x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

Pero $\int_0^x f(\xi)d\xi = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le \pi \\ -x & \text{si} \quad -\pi \le x < 0 \end{cases} = |x|$ , $x \in [-\pi,\pi]$

Luego por el Teorema 6, en el sentido de convergencia puntual, se tiene la representación en serie Cosenoidal de Fourier de la función valor absoluto en el intervalo $[-\pi, \pi]$

$$\left|x\right| = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\ ,\ x \in [-\pi, \pi]$$

**Ejercicios Propuesto :**

1) Considere la función definida por , $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
   i) Encontrar la serie de Fourier de la función $f$.
   ii) ¿ Cuál es el error cuadrático medio que se comete ?, al aproximar la función $f$ por el primer término de la serie de Fourier $S_1(x)$, encontrada en i).
   iii) Haga un bosquejo de las gráficas de $f$ y $S_1$.
2) Considere la función definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ -2\pi & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
   i) **Encontrar la serie de Fourier de la función** $f$.
   ii) **¿ Cuál es el error cuadrático medio** que se comete ?, al aproximar la función $f$ por el primer término de la serie de Fourier $S_1(x)$, encontrada en i).
   iii) Haga un **bosquejo de las gráficas de** $f$ **y** $S_1$.
3) Sea la función $f(x) = \pi\ \ ,\ -\pi \leq x \leq 0$
   i) Considere una extención $F$ al intervalo $[-\pi, \pi]$, de tal suerte que la función $F$ tenga una representación en serie Senoidal de Fourier.
   ii) **¿ Cuál es el error cuadrático medio** que se comete ?, al aproximar la función $F$ por el primer término de la serie Senoidal de Fourier $S_1(x)$, encontrada en i).
   iii) Haga un **bosquejo de las gráficas de** $F$ **y** $S_1$.
4) Sea la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$ . Encontrar una representación en serie Cosenoidal de Fourier, de tal suerte, que la existencia periódica de la función, evaluada en el origen sea una serir numérica con suma exactamente igual a uno.
5) Sea la función definida por: $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$
   i) Calcular la Serie de Fourier de la función.
   ii) Calcular el error cuadrŕico medio $E(f, S_2)$, donde $S_2$ es el segundo término de la suma parcial de la Serie.
   iii) Haga un bosquejo superpuesto, de las gráficas respectivas de $f$ y $S_2$
   iv) Usando la identidad de Parseval, demostrar o refutar si
   $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

6) i) Encontrar una representación en serie Senoidal de Fourier de la función $f(x) = |\cos x|$ en el intervalo abierto $x \in (0, \pi)$
ii) Haga un bosquejo de la existencia periódica de $f$.

## References

[1] D. Kreider, R. Kuller, D. Ostberg, F. Perkins.,*Introducción al Análisis Leneal. Parte 2*. Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1971
[2] E. Kreyszig. *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería. Volumen II*. Editorial Limusa, 1974.
[3] L. Schwartz. *Mathematics for the Physical Sciences*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York, 2008.