FORMAS NORMALES

NOCIONES

Eduardo Sáez

eduardo.saez@usm.cl

Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Matemática

- Dado un campo de vectores. ¿ Es posible encontrar una sucesión de cambios de coordenadas tales que ELIMINEN los términos norelevantes (noresonantes) ?

- Dado un campo de vectores. ¿ Es posible encontrar una sucesión de cambios de coordenadas tales que ELIMINEN los términos norelevantes (noresonantes) ?
- Respuesta Parcial Por el Teorema de Hartman en el caso hiperbólico se sabe que existe un cambio de coordenadas que ELIMINA todos los términos noresonantes

Idea General

- Dado un campo de vectores. ¿ Es posible encontrar una sucesión de cambios de coordenadas tales que ELIMINEN los términos norelevantes (noresonantes) ?
- Respuesta Parcial Por el Teorema de Hartman en el caso hiperbólico se sabe que existe un cambio de coordenadas que ELIMINA todos los términos noresonantes
- ¿ Caso no hiperbólico ?

- H_k , designa el Espacio Vectorial de Campos de Vectores cuyas componentes son polinomios homogeneos del mismo grado k .

- H_k , designa el Espacio Vectorial de Campos de Vectores cuyas componentes son polinomios homogeneos del mismo grado k .
- Ejemplo: $B_2 = \{x^2\frac{\partial}{\partial x}, xy\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial y}\}$ es la base canónica de H_2.

- H_k , designa el Espacio Vectorial de Campos de Vectores cuyas componentes son polinomios homogeneos del mismo grado k .
- Ejemplo: $B_2 = \{x^2\frac{\partial}{\partial x}, xy\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial y}\}$ es la base canónica de H_2.
- Sea la aplicación lineal $L = DX(0)x$ y consideremos el Corchete de Lie

$$[\cdot, L] : H_k \to H_k \text{ , tal que , } [Y, L] = (DL)Y - (DY)L$$

Corchete de Lie

- El corchete de Lie, claramente es bilineal y explícitamente tiene la forma:

- El corchete de Lie, claramente es bilineal y explícitamente tiene la forma:
- $$\left[\begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix}\right] := \begin{pmatrix} \frac{\partial L^1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial L^1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial L^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial L^n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y^1 \\ \vdots \\ Y^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Y^1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial Y^n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial Y^n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^1 \\ \vdots \\ L^n \end{pmatrix}$$

- Sea $\dot{x} = X(x), C^r, X(0) = 0, DX(0)x = L$, y el corchete de Lie $[\ ,L] : H_k \to H_k$, transformación lineal.
  Sea G_k el subespacio vectorial COMPLEMENTARIO de la imágen $[H_k, L]$ en H_k, es decir, la imágen se puede escribir

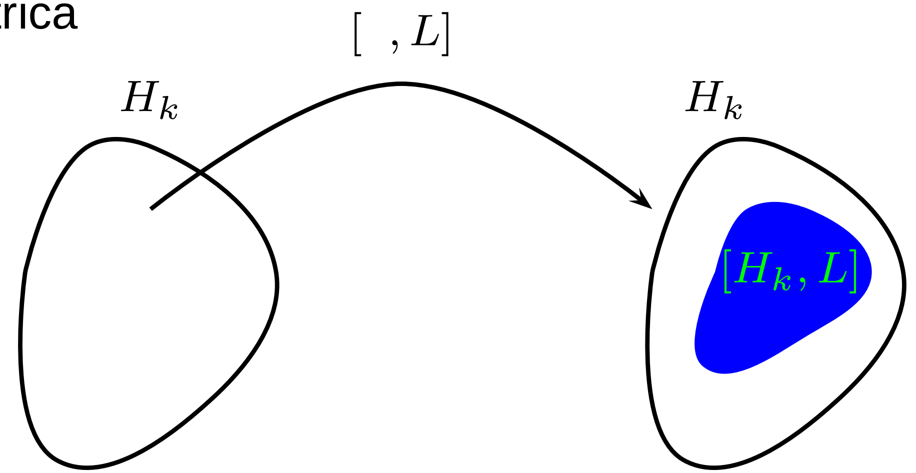
$$H_k = [H_k, L] \oplus G_k.$$

Entonces, existe un Cambio de Coordenadas analítico $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que el sistema $\dot{x} = X(x)$ en las nuevas coordenadas tiene la forma

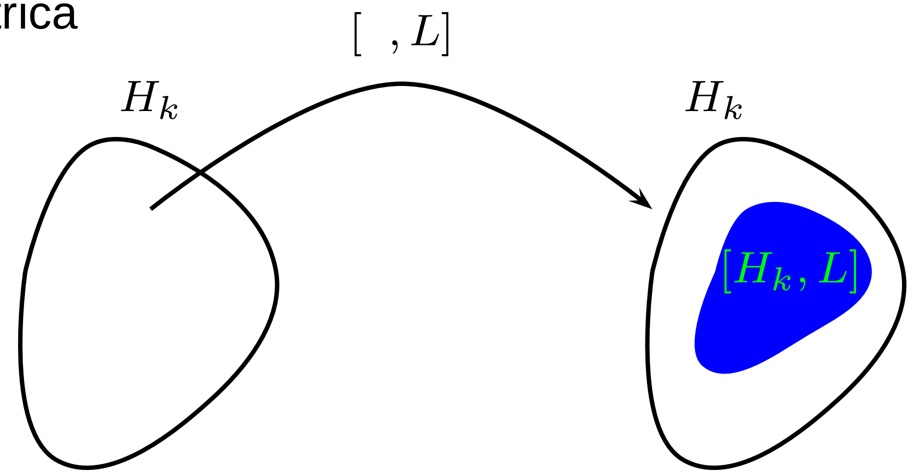
$$\dot{y} = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \cdots + g^{(r)}(y) + R_r,$$

donde $L = g^{(1)}(y)$, $g^k \in G_k,\ 2 \leq k \leq r, R_r = O(|y|^r)$

- Idea geométrica



- Idea geométrica



- Supongamos que $\dot{x} = X(x)$ ya a sido transformado, donde los términos de grado $< s$ pertenecen al subespacio complementario $G_i, 2 \leq i < s$, es decir ,

$$\dot{x} = g^{(1)}(x) + g^{(2)}(x) + \cdots g^{(s-1)}(x) + R_s(x),$$

con $g^{(i)}(x) \in G_i,\ 2 \leq i < s,\ J_{s-1}R_s(0) = 0$

- Sea el cambio de coordenadas $x = h(y) = y + P(y)$,donde P es un polinomio homogeneo de grado s con coeficientes por determinar. Sustituyendo en el sistema $\dot{x} = X(x)$ se tiene:

$$(I+DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y+P(y))+g^{(2)}(y+P(y))+\cdots+g^{(s-1)}(y+P(y))+R_s(y+P(y))$$

Cambio de coordenadas

- Sea el cambio de coordenadas $x = h(y) = y + P(y)$,donde P es un polinomio homogeneo de grado s con coeficientes por determinar. Sustituyendo en el sistema $\dot{x} = X(x)$ se tiene:

$$(I + DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y+P(y)) + g^{(2)}(y+P(y)) + \cdots + g^{(s-1)}(y+P(y)) + R_s(y+P(y))$$

- Pero , $\left\{ \begin{array}{rcl} g^{(1)}(y+P(y)) & = & DX(0)(y+P(y)) \\ & = & DX(0)y + DX(0)P(y) \\ & = & g^{(1)}(y) + DX(0)P(y). \end{array} \right.$

  Nótese que $DX(0)P(y)$ son términos de grado s y los términos de grado menor que s , en este caso $g^{(1)}(y)$, permanecen invariantes bajo el cambio de coordenadas.

- Sea el cambio de coordenadas $x = h(y) = y + P(y)$,donde P es un polinomio homogeneo de grado s con coeficientes por determinar. Sustituyendo en el sistema $\dot{x} = X(x)$ se tiene:

$$(I+DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y+P(y))+g^{(2)}(y+P(y))+\cdots+g^{(s-1)}(y+P(y))+R_s(y+P(y))$$

- Pero , $\left\{ \begin{array}{rcl} g^{(1)}(y+P(y)) & = & DX(0)(y+P(y)) \\ & = & DX(0)y + DX(0)P(y) \\ & = & g^{(1)}(y) + DX(0)P(y). \end{array} \right.$

  Nótese que $DX(0)P(y)$ son términos de grado s y los términos de grado menor que s , en este caso $g^{(1)}(y)$, permanecen invariantes bajo el cambio de coordenadas.

- Luego

$$(I+DP(y))\dot{y} = g^{(1)}(y)+g^{(2)}(y)+\cdots+g^{(s-1)}(y)+g^{(s)}(y)+DX(0)P(y)+O(|y|^s),$$

con $g^{(s)}(y)$ términos de grado s de $R_s(y)$.

Cambio de coordenadas, continuación

- Despejando simplemente

$$\dot{y} = (I + DP(y))^{-1}[g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \cdots + g^{(s-1)}(y) + g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) + O(|y|^s)]$$

Entonces

$$\dot{y} = (I - DP(y))[g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \cdots + g^{(s-1)}(y) + g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) + O(|y|^s)]$$

de donde

$$\dot{y} = g^{(1)}(y) + g^{(2)}(y) + \cdots + g^{(s-1)}(y) + \text{términos de grado } s + O(|y|^s).$$

- Despejando simplemente

$$\dot{y} = (I+DP(y))^{-1}[g^{(1)}(y)+g^{(2)}(y)+\cdots+g^{(s-1)}(y)+g^{(s)}(y)+DX(0)P(y)+O(|y|^s)]$$

Entonces

$$\dot{y} = (I-DP(y))[g^{(1)}(y)+g^{(2)}(y)+\cdots+g^{(s-1)}(y)+g^{(s)}(y)+DX(0)P(y)+O(|y|^s)]$$

de donde

$$\dot{y} = g^{(1)}(y)+g^{(2)}(y)+\cdots+g^{(s-1)}(y)+\text{términos de grado } s + O(|y|^s).$$

- Donde los términos de grado s, están dados por:

$$T.G.s = g^{(s)}(y) + DX(0)P(y) - DP(y)g^{(1)}(y),$$

pero $L = DX(0)x \Rightarrow DL = DX(0)$, $g^{(1)}(y) = L$

Fin de la demostración

- Luego ,

$$\begin{cases} T.G.s = g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ \qquad\quad = g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{cases}$$

- Luego , $$\begin{cases} T.G.s = g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ \qquad\;\; = g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{cases}$$
- Entonces, $g^{(s)} \in G_s$ pues sabemos que es suma directa con la imágen del corchete de Lie. $\square$

Fin de la demostración

- Luego ,
$$\begin{cases} T.G.s = g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ \quad\quad\; = g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{cases}$$
- Entonces, $g^{(s)} \in G_s$ pues sabemos que es suma directa con la imágen del corchete de Lie. $\square$
- Comentario: Por la demostración bosquejada, los sucesivos cambios de coordenadas introducen términos adicionales de orden superior en cada etapa.

- Luego , $$\left\{ \begin{array}{rcl} T.G.s & = & g^{(s)}(y) + \underbrace{(DL)P(y) - (DP(y))L}_{\text{Corchete de Lie}} \\ & = & g^{(s)}(y) + \underbrace{[P(y), L]}_{\text{imágen de } P(y)} \end{array} \right.$$
- Entonces, $g^{(s)} \in G_s$ pues sabemos que es suma directa con la imágen del corchete de Lie. $\square$
- Comentario: Por la demostración bosquejada, los sucesivos cambios de coordenadas introducen términos adicionales de orden superior en cada etapa.
- Ejemplo: Supongamos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + T.O.S. \\ \dot{y} & = & x + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + T.O.S. \end{array} \right.$$

El origen es una singularidad Monodrómica y claramente no está en forma normal.

Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

Además , $L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$

Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

$$\text{Además , } \quad L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- El corchete de Lie está dado por: $[\cdot, L] : H_2 \to H_2$, donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogeneos de grado 2

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

$$\text{Además , } L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- El corchete de Lie está dado por: $[\cdot, L] : H_2 \to H_2$, donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogeneos de grado 2
- Sea la base canónica de H_2

$$\mathscr{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

Desarrollo del ejemplo monodrómico

- La parte lineal está dada por: $DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Los valores propios son : $\pm i$.

$$\text{Además ,} \quad L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- El corchete de Lie está dado por: $[\cdot, L] : H_2 \to H_2$, donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogeneos de grado 2
- Sea la base canónica de H_2

$$\mathscr{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

- Por la linealidad del corchete $[\ ,\ ]$, basta buscar las imágenes de los vectores de la base.

Cálculos de las imágenes

- $$\left[\begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Cálculos de las imágenes

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- $$\left[\begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial xy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Entonces, las imágenes de los elementos de la base son:

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cálculos de las imágenes

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- $$\left[\begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial xy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Entonces, las imágenes de los elementos de la base son:
$$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\left[\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y^2 + x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

- $$\left[\begin{pmatrix} X_1(x,y) \\ X_2(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x} & \frac{\partial X_1}{\partial y} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} & \frac{\partial X_2}{\partial xy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- Entonces, las imágenes de los elementos de la base son:

$$\left[\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$$

- $$\left[\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y^2 + x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}$$

- $$\left[\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Continuación del cálculos de las imágenes

- $$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -x^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Continuación del cálculos de las imágenes

- $$\left[\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\2x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-x^2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-2xy\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x^2\\2xy\end{pmatrix}$$

- $$\left[\begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0\\y & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-xy\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-y^2+x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-xy\\y^2-x^2\end{pmatrix}$$

Continuación del cálculos de las imágenes

- $$\left[\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\2x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x^2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x^2\\2xy\end{pmatrix}$$
- $$\left[\begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\xy\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\y&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-xy\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-y^2+x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-xy\\y^2-x^2\end{pmatrix}$$
- $$\left[\begin{pmatrix}0\\y^2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&2y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y^2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y^2\\-2xy\end{pmatrix}$$

- El cálculo de las imágenes de la base $\mathscr{B}_2$ de H_2, bajo el corchete de Lie $[\,\cdot\,,\binom{-y}{x}]$ se resumen en la siguiente tabla:

- El cálculo de las imágenes de la base $\mathscr{B}_2$ de H_2, bajo el corchete de Lie $[\,\cdot\,, \binom{-y}{x}]$ se resumen en la siguiente tabla:

-

$[\,\cdot\,, \binom{-y}{x}]$	x^2	xy	y^2
$\frac{\partial}{\partial x}$	$2xy\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y}$	$(y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$	$-2xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$-x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$	$-xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}$	$-y^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}$

- El cálculo de las imágenes de la base $\mathscr{B}_2$ de H_2, bajo el corchete de Lie $[\,\cdot\,, \binom{-y}{x}]$ se resumen en la siguiente tabla:

$[\,\cdot\,, \binom{-y}{x}]$	x^2	xy	y^2
$\frac{\partial}{\partial x}$	$2xy\frac{\partial}{\partial x} + x^2\frac{\partial}{\partial y}$	$(y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$	$-2xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$\frac{\partial}{\partial y}$	$-x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$	$-xy\frac{\partial}{\partial x} + (y^2 - x^2)\frac{\partial}{\partial y}$	$-y^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}$

- Sea $\mathscr{A} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}_2}^{\mathscr{B}_2}([\,\cdot\,, \binom{-y}{x}])$ la matriz asociada a la transformación lineal $[\,\cdot\,, \binom{-y}{x}]$ respecto de las bases $\mathscr{B}_2$. Explícitamente $\mathscr{A}$ está dada por:

Matriz asociada

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

	$x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$xy\frac{\partial}{\partial x}$	$y^2\frac{\partial}{\partial x}$	$x^2\frac{\partial}{\partial y}$	$xy\frac{\partial}{\partial y}$	$y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$x^2\frac{\partial}{\partial x}$	0	-1	0	-1	0	0
$xy\frac{\partial}{\partial x}$	2	0	-2	0	-1	0
$y^2\frac{\partial}{\partial x}$	0	1	0	0	0	-1
$x^2\frac{\partial}{\partial y}$	1	0	0	0	-1	0
$xy\frac{\partial}{\partial y}$	0	1	0	2	0	-2
$y^2\frac{\partial}{\partial y}$	0	0	1	0	1	0

- Idea
- Campo
- Lie
- teo
- dem
- cambio1
- cambio2
- finccor
- desa
- cal
- calcon
- resumen
- matriz
- cus
- corchete
- dim
- fin

-

	$x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$xy\frac{\partial}{\partial x}$	$y^2\frac{\partial}{\partial x}$	$x^2\frac{\partial}{\partial y}$	$xy\frac{\partial}{\partial y}$	$y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$x^2\frac{\partial}{\partial x}$	0	-1	0	-1	0	0
$xy\frac{\partial}{\partial x}$	2	0	-2	0	-1	0
$y^2\frac{\partial}{\partial x}$	0	1	0	0	0	-1
$x^2\frac{\partial}{\partial y}$	1	0	0	0	-1	0
$xy\frac{\partial}{\partial y}$	0	1	0	2	0	-2
$y^2\frac{\partial}{\partial y}$	0	0	1	0	1	0

- Por cálculo directo $det(\mathscr{A}) \neq 0$, en consecuencia la transformación lineal $[\,\cdot\,,\ \binom{-y}{x}]$ es un isomorfismo.

  Además , $\left\{ \begin{array}{lcl} [H_2\,,\ \binom{-y}{x}] & = & H_2 \\ G_2 & = & \{\vec{0}\} \end{array} \right.$

	$x^2\frac{\partial}{\partial x}$	$xy\frac{\partial}{\partial x}$	$y^2\frac{\partial}{\partial x}$	$x^2\frac{\partial}{\partial y}$	$xy\frac{\partial}{\partial y}$	$y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$x^2\frac{\partial}{\partial x}$	0	-1	0	-1	0	0
$xy\frac{\partial}{\partial x}$	2	0	-2	0	-1	0
$y^2\frac{\partial}{\partial x}$	0	1	0	0	0	-1
$x^2\frac{\partial}{\partial y}$	1	0	0	0	-1	0
$xy\frac{\partial}{\partial y}$	0	1	0	2	0	-2
$y^2\frac{\partial}{\partial y}$	0	0	1	0	1	0

- Por cálculo directo $det(\mathscr{A}) \neq 0$, en consecuencia la transformación lineal $[\,\cdot\,,\ \binom{-y}{x}]$ es un isomorfismo.

  Además , $\left\{\begin{array}{lcl} [H_2\,,\ \binom{-y}{x}] & = & H_2 \\ G_2 & = & \{\vec{0}\} \end{array}\right.$

- Luego, todos los términos cuadráticos del campo de vectores se pueden eliminar por cambio de coordenadas.

Forma normal de la Cúspide

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.

Forma normal de la Cúspide

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.
- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forma normal de la Cúspide

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.
- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D. k Arrowsmith en [2] , usando la técnica del blowing-up, demostró que para campos de vectores polinomiales con la parte lineal anterior, sólo existen 7 configuraciones C^0-equivalentes. Además demostró que la cúspide es la única singularidad en codimensión dos.

Forma normal de la Cúspide

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.
- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D. k Arrowsmith en [2] , usando la técnica del blowing-up, demostró que para campos de vectores polinomiales con la parte lineal anterior, sólo existen 7 configuraciones C^0-equivalentes. Además demostró que la cúspide es la única singularidad en codimensión dos.
- Entonces el campo de vectores es del tipo:

$$X : \begin{cases} \dot{x} & = & y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + T.O.S. \\ \dot{y} & = & b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + T.O.S. \end{cases}$$

Forma normal de la Cúspide

- Sea un campo de vectores polinomial (con suficiente diferenciabilidad), tal que en el origen, existe una singularidad de tipo Cúspide de codimensión dos.

- Supondremos que por cambio de coordenadas la parte lineal tiene la forma:

$$DX(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- D. k Arrowsmith en [2] , usando la técnica del blowing-up, demostró que para campos de vectores polinomiales con la parte lineal anterior, sólo existen 7 configuraciones C^0-equivalentes. Además demostró que la cúspide es la única singularidad en codimensión dos.

- Entonces el campo de vectores es del tipo:

$$X : \begin{cases} \dot{x} & = & y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + T.O.S. \\ \dot{y} & = & b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + T.O.S. \end{cases}$$

- Sea la aplicación lineal, $L = DX(0)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$, o bien,

  usando la notación para campo de vectores en el Espacio Tangente , $L = y\dfrac{\partial}{\partial x}$

Corchete de Lie

- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \to H_2$,
  donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogeneos de grado 2.

Corchete de Lie

- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \to H_2$,
donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogeneos de grado 2.

- Sea la base canónica de H_2

$$\mathscr{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

Por la linealidad del corchete $[\ ,\ L]$, basta buscar bajo L, las imágenes de los vectores de la base.

- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \to H_2$,
  donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogeneos de grado 2.

- Sea la base canónica de H_2

$$\mathscr{B} = \{(x^2, 0), (xy, 0), (y^2, 0), (0, x^2), (0, xy), (0, y^2)\}$$

  Por la linealidad del corchete $[\ ,\ L]$, basta buscar bajo L, las imágenes de los vectores de la base.

- Efectuando los cálculos, las imágenes de los vectores de la base $\mathscr{B}$ por el corchete de Lie se resumen en la siguiente tabla:

Corchete de Lie

- Sea el corchete de Lie: $[\cdot, L] : H_2 \to H_2$,
  donde H_2 es el Espacio Vectorial de campos de vectores polinomiales homogeneos de grado 2.

- Sea la base canónica de H_2

$$\mathscr{B} = \{(x^2,0),(xy,0),(y^2,0),(0,x^2),(0,xy),(0,y^2)\}$$

  Por la linealidad del corchete $[\ ,\ L]$, basta buscar bajo L, las imágenes de los vectores de la base.

- Efectuando los cálculos, las imágenes de los vectores de la base $\mathscr{B}$ por el corchete de Lie se resumen en la siguiente tabla:

-

$[\,\cdot\,, y\frac{\partial}{\partial x}]$	x^2	xy	y^2
$\frac{\partial}{\partial x}$	$-2xy\frac{\partial}{\partial x}$	$-y^2\frac{\partial}{\partial x}$	0
$\frac{\partial}{\partial y}$	$x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}$	$xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}$	$y^2\frac{\partial}{\partial x}$

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}] = \left\langle \left\{ -2xy\frac{\partial}{\partial x}, -y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

Dimensión de la Imágen

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}] = \left\langle \left\{ -2xy\frac{\partial}{\partial x}, -y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$, son Linealmente Dependientes.

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}] = \left\langle \left\{ -2xy\frac{\partial}{\partial x}, -y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$, son Linealmente Dependientes.

- Consideremos la base $\tilde{\mathscr{B}}$, de la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$ dada por :

$$\tilde{\mathscr{B}} = \left\{ xy\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

Dimensión de la Imágen

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}] = \left\langle \left\{ -2xy\frac{\partial}{\partial x}, -y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$, son Linealmente Dependientes.

- Consideremos la base $\tilde{\mathscr{B}}$, de la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$ dada por :

$$\tilde{\mathscr{B}} = \left\{ xy\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

- $dim([H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]) = 4$. Entonces, $dim(G_2) = 2$, donde $H_2 = [H_2, y\frac{\partial}{\partial x}] \oplus G_2$.

Dimensión de la Imágen

- Por la tabla anterior, la imágen de H_2 por el corchete de Lie está generada por:

$$[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}] = \left\langle \left\{ -2xy\frac{\partial}{\partial x}, -y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y}, y^2\frac{\partial}{\partial x} \right\} \right\rangle$$

- Nótese que los vectores que generan la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$, son Linealmente Dependientes.

- Consideremos la base $\tilde{\mathscr{B}}$, de la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$ dada por :

$$\tilde{\mathscr{B}} = \left\{ xy\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} - y^2\frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

- $dim([H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]) = 4$. Entonces, $dim(G_2) = 2$, donde $H_2 = [H_2, y\frac{\partial}{\partial x}] \oplus G_2$.

- Una base clara para G_2 es , $\left\{ x^2\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\}$

Final

- Por el Teorema de Formas Normales, existe un cambio de coordenadas analítico $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que el sistema original en las nuevas corrdenadas tiene la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{u} & = & v + au^2 + T.O.S \\ \dot{v} & = & bu^2 + T.O.S \end{array} \right.$$

- Por el Teorema de Formas Normales, existe un cambio de coordenadas analítico $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que el sistema original en las nuevas corrdenadas tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{u} & = & v + au^2 + T.O.S \\ \dot{v} & = & bu^2 + T.O.S \end{cases}$$

- Comentario: Como la base de la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$ no es única , las Formas Normales no son únicas

- Por el Teorema de Formas Normales, existe un cambio de coordenadas analítico $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que el sistema original en las nuevas corrdenadas tiene la forma

$$\begin{cases} \dot{u} &= v + au^2 + T.O.S \\ \dot{v} &= bu^2 + T.O.S \end{cases}$$

- Comentario: Como la base de la imágen $[H_2, y\frac{\partial}{\partial x}]$ no es única , las Formas Normales no son únicas

References

[1] Arnold V. : Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentialles Ordinaires, *Editions MIR-Moscou , traducido ,* 1980.

[2] Arrowsmith D. K. : The Singularity $x\dfrac{\partial}{\partial y}$, *Journal of Differential Equation* , **34** No. 2, p.153-166, 1979.

[3] Guckenheimer J. and Holmes P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* , Springer-Verlag.