ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES CUASILINEALES PRIMER ORDEN, NOCIONES BÁSICAS

E. SÁEZ

Una Ecuación Diferencial Partial (E.D.P.) de Primer Orden, en dos variables, es simplemente una expresión de la forma

$$E(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}) = 0 \tag{1}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} a\tfrac{\partial z}{\partial x} + b\tfrac{\partial z}{\partial y} &= 0 \;\;,\;\; \text{a,b son constantes} \\ x\tfrac{\partial z}{\partial x} - \tfrac{\partial z}{\partial y} &= f(x,y) \;\;,\;\; f \;\; \text{es una función continua} \end{aligned}$$

Pregunta: ¿ Cuál es la idea de una solución de una E.D.P. ?

Respuesta: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas. La función f es una solución de la E.D.P. (1) ssi se satisface la identidad

$$E(x, y, f(x,y), \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) \equiv 0 \;\;,\;\; \text{en} \;\; \Omega$$

Geométricamente la identidad anterior significa , que la gráfica de f que es una superficie en $\mathbb{R}^3$ satisface la E.D.P. ¿ Como encontrar estas superficies ?. Para una E.D.P cualesquiera esta pregunta es muy complicada. Sin embargo en algunos casos muy particulares es posible dar respuesta a la pregunta.

Definición : Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domino . Una E.D.P. de Primer Orden de la forma

$$P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x,y,z) \;\;,\;\; P, Q, R \in C^1(\Omega) \tag{2}$$

se llama **E.D.P. Cuasilineal de Primer Orden**, donde las funciones coeficientes P, Q no se anulan simultaneamentes en Ω.

La ecuación (2) se llama Cuasilineal pues en general las funciones coeficientes P, Q, R no necesariamente son transformaciones lineales en la tercera coordenada.

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

La ecuación (2) bajo un punto de vista vectorial, se puede escribir equivalentemente en términos de la base canónica $\{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$ del Espacio Vectorial $\mathbb{R}^3$, como el Producto Punto:

$$(P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}) \cdot (\frac{\partial z}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial z}{\partial y}\hat{\jmath} - \hat{k}) = 0$$

Consideremos el campo de vectores $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, tal que,

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\hat{\imath} + Q(x, y, z)\hat{\jmath} + R(x, y, z)\hat{k}. \tag{3}$$

Con el objeto de simplificar la escritura, equivalentemente el anterior campo de vectores se puede escribir simplemente $\vec{F} = (P, Q, R)$ en el entendido que el trio es un vector.

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^3$, S una superficie en Ω que es la gráfica de una función diferenciable de dos variables $f : D \to \mathbb{R}$ tal que $z = f(x, y)$ con D un dominio en $\mathbb{R}^2$. Entonces si se define $E(x, y, z) = z - f(x, y)$ se tiene que S coincide con la gráfica del conjunto

$$E^{-1}(0) = \{(x, y, z) \mid z - f(x, y) = 0\}$$

La superficie S se puede entonces considerar como la superficie de nivel cero de la función E. Si S es una superficie regular que es solución de (2) y consideramos el gradiente $\vec{\nabla}E = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)$ se tiene de inmediato la identidad

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla}E \equiv 0 \ , \ \text{en} \ \ E^{-1}(0)$$

Si se interpreta geométricamente la identidad anterior significa que la superficie solución S, también llamada Superficie Integral, es tangente al campo de vectores $\vec{F}$ (ver Fig. 1).

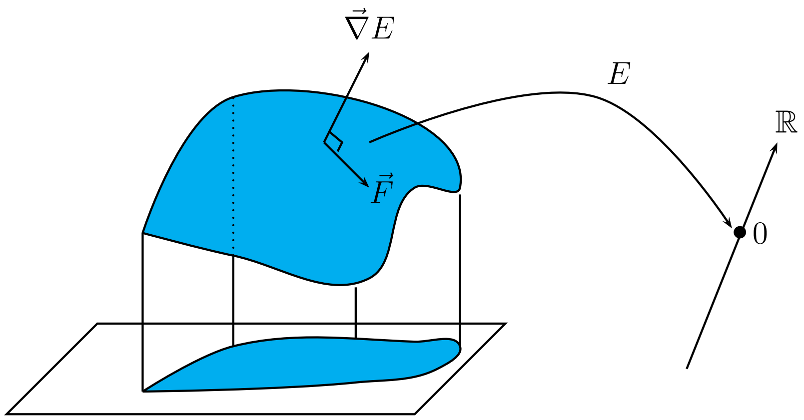

Fig. 1

Pregunta: ¿ Como encontrar superficies tangentes al campo de vectores $\vec{F}$?.

Para responder la pregunta anterior recordemos la definición de órbita , o bien, trayectoria de un campo de vectores.

Definición. Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{F}:\Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores. Una curva paramétrica $\vec{r}: I \to \Omega$ donde I es un subintervalo de $\mathbb{R}$ es una órbita (trayectoria) del campo de vectores ssi se satisface la identidad

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \vec{F}(\vec{r}(t)) \quad , \quad \text{en} \quad I \tag{4}$$

La definición anterior dice que una curva paramétrica tal que el vector tangente a la curva coincide con el campo de vectores en cada punto, es una órbita (ver Fig. 2).

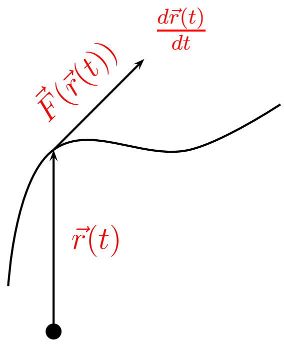

Fig. 2

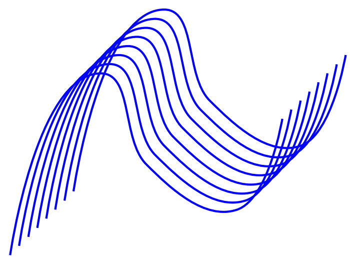

Fig. 3, Superficie de órbitas

Nótese que si se tiene una superficie (ver Fig. 3) formada sólo por órbitas del campo de vectores entonces es inmediato que es una superficie tangente al campo de vectores y en consecuencia es una solución de la E.D.P (2). El problema para encontrar Superficies Integrales se reduce a conseguir órbitas del campo de vectores.

La identidad (4), se puede escribir equivalentemente en término de las componentes de los vectores, de donde se tiene la identidad:

$$(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \equiv (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

o bien, simplemente igualando las componentes de los campos de vectores se tiene el sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & P(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} & = & Q(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} & = & R(x,y,z) \end{array}} \tag{5}$$

El sistema anterior se puede escribir en términos de las diferenciales como un sistema de tres formas diferenciales:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} dx & = & P(x,y,z)dt \\ dy & = & Q(x,y,z)dt \\ dz & = & R(x,y,z)dt \end{array}} \tag{6}$$

Comentario 1: La solución general del sistema (5) son familias de curvas descritas por un sistema de tres ecuaciones paramétricas que dependen de tres constantes arbitrarias determinadas por condiciones iniciales.

Comentario 2: El sistema (5) en general no es lineal y se sabe que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias nolineales es difícil de resolver explícitamente.

Comentario 3: En general, geométricamente en $\mathbb{R}^3$, las curvas quedan determinadas por al menos dos superficies que se intersectan transversalmente.

Comentario 4: Por el comentario 3, una alternativa para conseguir explícitamente un par de superficies que se intersecten transversalmente a lo largo de una solución del sistema (6) , consiste simplemente en eliminar el parámetro t (sólo se pierde la orientación inducida a las curvas por el parámetro) del sistema de formas diferenciales (6) y conseguir dos formas diferenciales diferentes de tal suerte que sus respectivas superficies se intersecten transversalmente.

$$\text{Supongamos que,} \quad \boxed{\begin{array}{rcl} \varphi_1(x,y,z) & = & c_1 \\ \varphi_2(x,y,z) & = & c_2, \end{array}} \tag{7}$$

son un par de ecuaciones de tales superficies. La Fig. 4 muestra su interpretación gráfica como superficies de nivel, de donde las intersecciones de las superficies de nivel $\varphi_1^{-1}(c_1) \cap \varphi_2^{-1}(c_2)$ son curvas que contienen soluciones del sistema (5) , o bien soluciones del sistema (6), o bien órbitas del campo de vectores (3).

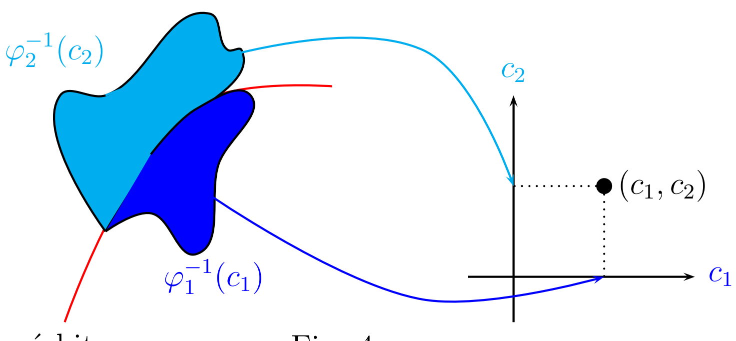

Fig. 4

Las superficies (7) se llaman características de (2).

Importante: Nótese que si el punto (c_1, c_2), se mueve sobre una curva arbitaria en el plano c_1c_2 , la órbita en $\mathbb{R}^3$ adquiere una dinámica y genera una superficie de órbitas como en la Fig. 3. , es decir, se tiene una superficie integral de (2).

Más exactamente , sea $\Phi(c_1, c_2) = 0$ con $\Phi \in C^1$, la ecuación de una curva arbitraria diferenciable en el plano c_1c_2. Entonces, por las características (7) reemplazando las constantes en la ecuación por las funciones φ_1, φ_1 respectivamente, se obtiene la ecuación de una superficie integral en las variables x, y, z de la forma:

$$\Phi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) = 0$$

La expresión anterior es una ecuación de una familia de superficies integrales (una superficie integral por cada función Φ) , llamada solución general por contener una función arbitraria.

Análogamente, en el plano c_1c_2 se puede considerar una gráfica de una función arbitaria, dada por una ecuación de la forma $c_2 = \Phi(c_1)$ con $\Phi \in C^1$. Por cada punto de la gráfica de Φ se tiene, excepto casos degenerados, en $\mathbb{R}^3$ una órbita del campo de vectores (3) como intersección de las características (7), ver Fig. 5. Los puntos de la gráfica de Φ generan en $\mathbb{R}^3$ una superficie de órbitas y en consecuencia una solución general de (2) de ecuación

$$\varphi_2(x, y, z) = \Phi(\varphi_1(x, y, z))$$

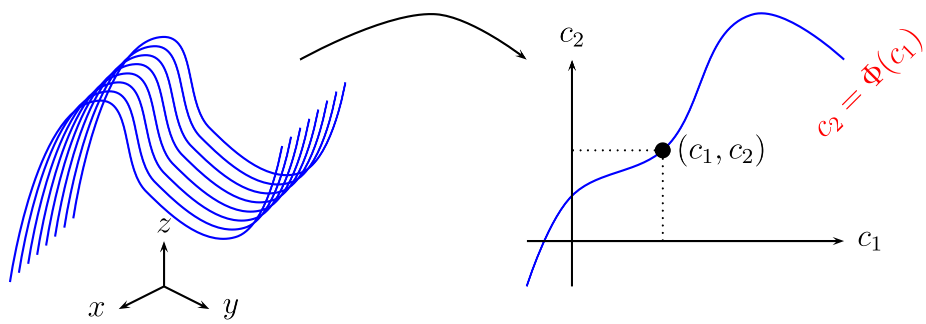

Fig. 5

Problema Un problema frecuente en la resolución de E.D.P. cuasilineales es preguntar , si existe, una superficie solución de la E.D, que tenga la propiedad de contener una curva predeterminada.

Respuesta La solución se reduce a encontrar la ecuación de la curva en el plano de las constantes c_1c_2 que tiene la propiedad de generar la superficie integral solución del problema. Para conseguir dicha curva basta considerar el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las características y las ecuaciones que definen la curva dada. Este sistema, si es consistente, define implícitamente la ecuación de la curva que genera la superficie integral solución del problema.

Observación : Es inmediato que si la curva dada en $\mathbb{R}^3$ es una órbita del campo de vectores (3) significa que la curva es la intersección respectiva de dos superficies de niveles c_1^*, c_2^* de las caracteríticas. Entonces dada cualquier curva diferenciable en el plano de las constantes c_1c_2 que pase por el punto (c_1^*, c_2^*) genera una superficie solución. El problema es mal planteado, en el sentido que no se tiene unicidad de solución .

Ejemplo. Encontrar la superficie solución de la E.D.P

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

que tenga la propiedad de contener la curva intersección de la superficie $z = y^2$ con el plano $x = 0$.

Respuesta: El sistema (5) se reduce

$$\begin{cases} dx &= ydt \\ dy &= -xdt \\ dz &= 0 \end{cases} \quad \text{, de las dos primeras ecuaciones se tiene } xdx = -ydy$$

Integrando, se obtiene la primera característica $x^2 + y^2 = c_1$, donde $c_1 > 0$ es una constante arbitraria. La segunda característica es inmediata de la tercera ecuación pues basta integrar y se obtiene $z = c_2$, donde c_2 es una constante arbitraria. Sea una curva en el plano de las constantes $c_2 = \Phi(c_1)$ con $\Phi \in C^1$ una función arbitaria. Entonces $z = \Phi(x^2 + y^2)$ es una solución general de la E.D.P.

Para encontrar la solución que contenga la curva dada consideremos el sistema formado por las característica y las ecuaciones de la curva, en efecto:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 &=& c_1 \\ z &=& c_2 \\ z &=& y^2 \\ x &=& 0 \end{array}\right|$$

Este sistema de 4 ecuaciones y las 3 variables de $\mathbb{R}^3$, define implícitamente la ecuación de la curva en el plano c_1c_2 que genera la superficie integral solución del problema. Por esta razón operatoriamente eliminando las variables se obtiene la ecuación $c_2 = c_1$ con $c_1 > 0$. Geométricamente se tiene la bisectriz principal del plano c_1c_2 restringida a $c_1 > 0$. Esta semirecta por las características genera el paraboloide $z = x^2 + y^2$ que es la superficie integral del problema.

Comentario Si en un problema determinado, se dispone de una primera característica y no es simple conseguir la segunda característica independiente. Entonces se pueden restringir los cálculos a la característica conocida, ¿ Cómo ?. Simplemente asumiendo su ecuación. La curva intersección que se obtenga con la segunda característica independiente es una órbita del campo de vectores pues se encuentra por la restricción en la gráfica de la primera característica.

Ejemplo: Resolver $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = -xy$

Respuesta: El sistema (5) se reduce

$$\begin{cases} dx &= xzdt \\ dy &= yzdt \\ dz &= -xydt \end{cases}, \text{ de las dos primeras ecuaciones se tiene } \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$$

Integrando, se obtiene la primera característica $y = xc_1$, donde c_1 es una constante arbitraria. Para conseguir la segunda característica se puede multiplicar la tercera ecuación del sistema por z y se obtiene $zdz = y(-xzdt)$ de donde por la primera ecuación del sistema se tiene $zdz = -ydx$. **Restringiendo los cálculos a la primera característica** $y = xc_1$ se obtiene la ecuación diferencial ordinaria $zdz = -c_1xdx$ cuya solución inmediata es $z^2 + x^2c_1 = c_2$. Pero por la primera característica reemplazando c_1, se tiene que $z^2 + xy = c_2$ es claramente la segunda característica independiente, donde c_2 es una constante arbitraria.

Ejercicio Importante Encontrar la solución general de la Ecuación de Onda Unidimensional donde $-\infty < x < \infty$ es una variable espacial y $t > 0$ designa el tiempo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ ,\ c > 0 \text{ es una constante}$$

Solución: La Ecuación de Onda no es una E.D.P. de primer orden, sin embargo, se puede reducir a dos E.D.P. Cuasilineales de primer orden ¿ Como ?.

La Ecuación de Onda se puede factorizar en el siguiente sentido

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}) \circ (\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x})(z) &= 0 \quad \text{o bien, permutando los factores} \\ (\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}) \circ (\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x})(z) &= 0 \end{cases}$$

Es inmediato que si $z = f(t, x)$ con $f \in C^2$ es una solución de uno de los factores, entonces es solución de la ecuación completa. Además por la Linealidad de la Ecuación de Onda, o bien, por el Principio de Superposición de soluciones para operadores lineales, la combinación lineal de soluciones es solución.

Por la idea anterior el problema de resolución de la Ecuación de Onda se reduce a encontrar soluciones de los factores anteriores, es decir a resolver E.D.P. Cuasilineales.

Sea el factor $\frac{\partial z}{\partial t} + c\frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Entonces el sistema (5) se reduce:

$$\begin{cases} dt &= d\lambda \\ dx &= cd\lambda \\ dz &= 0 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones del sistema se tiene la primera característica $ct-x=c_1$ y de la tercera ecuación se obtiene la segunda característica $z=c_2$. Sea una curva en el plano de las constantes $c_2=\varphi(c_1)$ con $\varphi\in C^2$ una función arbitaria. Entonces $z=\varphi(x-ct)$ es una solución de la Ecuación de Onda.

Análogamente considerando el factor $\frac{\partial z}{\partial t}-c\frac{\partial z}{\partial x}=0$ se obtiene las características independientes $ct+x=c_1, z=c_2$. Luego $z=\psi(x+ct)$ con $\psi\in C^2$ una función arbitraria es otra solución de la Ecuación de Onda. Por el Principio de Superposición se obtiene la solución

$$z=\varphi(x-ct)+\psi(x+ct) \tag{8}$$

La solución anterior es general por contener dos funciones arbitarias dado que la E.D.P es de segundo orden y lleva el nombre de solución de D'Alambert de la Ecuación de Onda.

Interpretación de la solución $z=\varphi(x-ct)$

Supongamos que la gráfica de $z=\varphi(x)$ es como en la Fig. 6, la variable t es el tiempo y la constante $c>0$ es una velocidad. Entonces $s=ct$ es un desplazamiento y la gráfica de $z=\varphi(x-ct)$ es la gráfica de $z=\varphi(x)$ que se traslada en cada instante $s=ct$ unidades hacia la derecha.

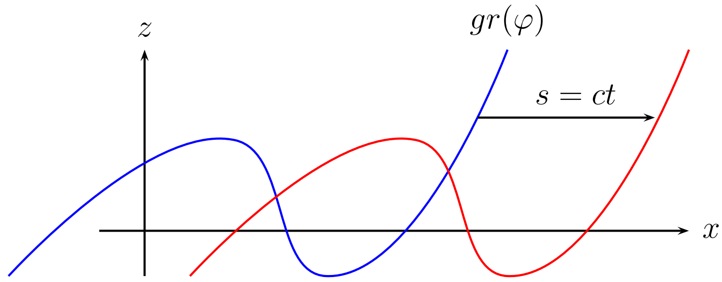

Fig. 6

Por la interpretación anterior se dice que $z=\varphi(x-ct)$ es una onda viajera de la Ecuación de Onda.

Análogamnete, la gráfica en el plano xz de la solución $z=\psi(x+ct)$ es la gráfica de la onda $z=\psi(x)$ que se traslada en sentido negativo del eje x a velocidad $s=ct$. En consecuencia, la solución (8) es una onda que es suma de dos ondas viajeras.

Problema adicional , supongamos que interesa encontrar soluciones de la Ecuación de Onda que satisfagan un par de condiciones iniciales llamadas de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} z(0,x) & = & f(x) \\ \frac{\partial z}{\partial t}(0,x) & = & g(x) \end{array}\right. \quad ; \text{ con } f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \ , \ f\in C^2,\ g\in C^1$$

Respuesta: La solución general de la Ecuación de Onda es (8) y el problema se reduce a encontrar las funciones precisas φ, ψ tales que (8) satisfaga las condiciones de Cauchy.

Tomando $t=0$ y reemplazando las condiciones iniciales en la solución general se tiene que φ, ψ satisfacen el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \varphi(x)+\psi(x) \\ g(x) & = & -c\varphi'(x)+c\psi'(x) \end{array}\right.$$

Derivando la primera ecuación del sistema anterior respecto de x se tiene que las derivadas de φ, ψ satisfacen el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi'(x)+\psi'(x) & = & f'(x) \\ -c\varphi'(x)+c\psi'(x) & = & g(x) \end{array}\right|$$

Despejando del sistema las derivadas de φ, ψ tenemos:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi'(x) & = & \frac{cf'(x)-g(x)}{2c} \\ \psi'(x) & = & \frac{cf'(x)+g(x)}{2c} \end{array}\right.$$

Integrando respecto de x se tiene las identidades:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(x) & \equiv & \frac{f(x)}{2}-\frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)d\xi \\ \psi(x) & \equiv & \frac{f(x)}{2}+\frac{1}{2c}\int_0^x g(\xi)d\xi \end{array}\right.$$

Reemplazando las traslaciones $x\to x-ct$ y $x\to x+ct$ en la primera y segunda identidad respectivamente se obtiene:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi(x-ct) & \equiv & \frac{f(x-ct)}{2}-\frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(\xi)d\xi \\ \psi(x+ct) & \equiv & \frac{f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(\xi)d\xi \end{array}\right.$$

Finalmente, sumando las dos identidades anteriores encontramos la solución de D'Alambert del problema de la Ecuación de Onda con condiciones iniciales de Cauchy.

$$z(t,x)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi$$

Ejercicios:

1) Encontrar la solución general de la E.D.P.

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=(x+y)z$$

2) Sea la Ecuación Diferencial Parcial:

$$y^2 z\frac{\partial z}{\partial x} - x^2 z\frac{\partial z}{\partial y} \;=\; x^2 y$$

i) Encontrar dos características independientes.
ii Encontrar, si existe , la superficie integral que contiene la curva intersección de las superficies

$$x^3 + y^2 \;=\; 1 \;\;,\;\; z \;=\; 0$$

3) Encontrar la superficie integral de la E.D.P.

$$x(y^2+z)\frac{\partial z}{\partial x} - y(x^2+z)\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2-y^2)z$$

que contiene la recta intersección de los planos $x + y = 0,\; z = 1$.
4) Encontrar la superficie integral de la E.D.P

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^3$$

que contiene la recta de ecuaciones paramétricas $x = 0,\; y = \lambda,\; z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.
5) Sea la ecuación de Onda con condiciones de Cauchy:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; 16\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , & -\infty < x < \infty \\ u(0,x) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = x & , & -\infty < t < \infty \end{array}$$

(i) Resolver el problema de Cauchy.
(ii) En el plano (x, u) haga un bosquejo de las ondas del problema para los instantes $t = 0$ y $t = 2$, respectivamente.
(iii) En el plano (x, u) ¿ Para qué tiempo t la onda del problema pasa por el punto $(x, u) = (1, 1)$?.
6) Sea la ecuación de Onda Unidimensional

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \;\;,\; \text{con} \;\; -\infty < x < \infty \;\;,\;\; t > 0$$

i) ¿ Cuál es la solución que satisface las condiciones iniciales de Cauchy ?

$$\begin{array}{rcl} z(0,x) & = & 1 - x^2 \\ \frac{\partial z}{\partial t}(0,x) & = & 0 \end{array}$$

ii) En el plano xz haga un bosquejo de la solución para $t = 0$ y $t = 1$.
iii) En el plano xz. ¿ Para qué tiempo $t > 0$ la solución encontrada en i) pasa por el punto $(x, z) = (0, -4)$?. Haga un bosquejo de la onda.
iv) ¿ Existe algun instante t tal que la solución encontrada en i) pasa, en el plano xz, por el punto $(x, z) = (1, \frac{1}{2})$?.

7) Sea el problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;\; ; \qquad\qquad x,t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si} \quad x \in [0,\pi] \\ 0 & \text{si} \quad \text{otro caso} \end{cases} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \equiv 0 \end{array}\right|$$

Haga un bosquejo en el plano ux, de la onda solución del problema, en el instante $t = \pi$.

8) Sea la E.D.P.: $3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \;\; , \; -\infty \leq x, t \leq \infty$

i) Encontrar una solución general de la E.D.P.

ii) Resolver el problema de Cauchy: $\left.\begin{array}{rcll} u(x,0) & = & f(x) & , f \in C^1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = & g(x) & , g \in C^0 \end{array}\right|$

Indicación: Aplique las ideas que se usaron para deducir la solución de D'Alambert.

References

[1] A. R. Castro F. *Curso básico de ecuaciones en derivadas parciales* . Addison-Wesley Iberoamericana . Wilmington, Delaware. E.U.A. 1997.

[2] I. Peral A. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales* . Addison-Wesley / Universidad Autónoma de Madrid. Wilmington, Delaware. E.U.A. 1995.