ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES
ESTUDIO CUALITATIVO

E. SÁEZ

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto del plano, $P, Q : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones continuas.

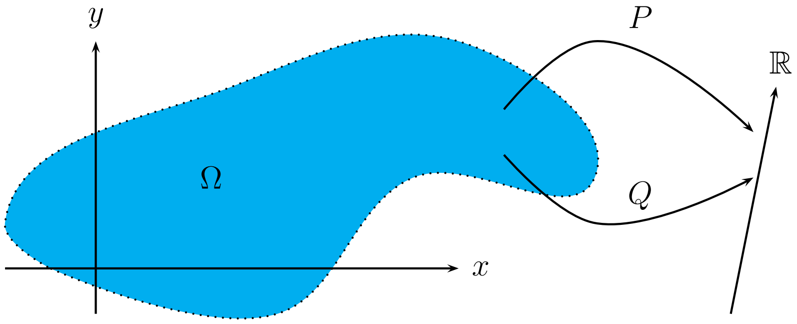


Fig. 0

Definición.- La expresión $P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ = \ 0$, se llama Forma Diferencial de una Ecuación Diferencial Ordinaria.

Definición.- Un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ se llama una Singularidad de la forma diferencial

(1) $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ = \ 0 \quad ,$$

si y sólo si,

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) \ = \ 0$$

Es inmediato de la definición que una singularidad de la forma diferencial es simplemente un punto en el dominio de definición Ω, que anula simultáneamente ambos coeficientes de las diferenciales dx y dy resp.

Sean $P^{-1}(0) \ = \{(x,y) \in \Omega \mid P(x,y) = 0\}$ y $Q^{-1}(0) \ = \{(x,y) \in \Omega \mid Q(x,y) = 0\}$ los ceros de las funciones P y Q resp., entonces

(2) $$Sing \ = \ P^{-1}(0) \cap Q^{-1}(0)$$

es el conjunto de las Singularidades de la forma diferencial.

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

En el estudio de (1) es fundamental, como se puede apreciar en textos tales como [1, 2, 4], la descripción cualitativa de los tipos de soluciones de (1) en vecindades suficientemente pequeñas de las singularidades del conjunto (2).

Comentario: Si $(x, y) \in \Omega' = \Omega - Q^{-1}(0)$, la forma diferencial (1) se puede escribir equivalentemente en Ω', como una ecuación diferencial típica de la forma;

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} \ = \ F(x, y) \quad \text{donde} \quad F(x, y) \ = \ -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}\ , \ (x, y) \in \Omega'$$

Sin embargo (3), no es una forma adecuada para estudiar las ecuaciones diferenciales pues se omite las singularidades ya que

$$\Omega' \cap Sing \ = \ \Phi$$

En textos más avanzados, por ejemplo en [3], se estudia un teorema llamado del flujo tubular que demuestra que mediante cambios de coordenadas en una vecindad de un punto que no es singularidad (punto regular), cualitativamente las soluciones son equivalentes, por ejemplo, a una familia de líneas horizontales en un plano. Por este teorema las soluciones de (3), cualitativamente son como si fueran sólo líneas horizontales. Por esta razón en estas notas consideramos la forma (1) y en particular el estudio de las singularidades.

Definición.- Una Forma Diferencial del tipo

$$(4) \qquad P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy \ = \ 0$$

se llama de Variables Separables, donde P_1, P_2 son funciones continuas definidas en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ y Q_1, Q_2 son funciones continuas definidas en un intervalo abierto $J \subset \mathbb{R}$.

Pregunta.- Cualitativamente ¿ Cómo son en el rectángulo $I \times J \subset \mathbb{R}^2$, las soluciones de (4) ?

Respuesta Parcial.

Supongamos que $y_0 \in Q_1^{-1}(0)$, es decir, y_0 es un cero de Q_1. Como y_0 es una constante se tiene que $dy_0 \ \equiv \ 0$. Reemplazando $y \ = \ y_0$ en (4) se tiene que el segmento de la recta $y \ = \ y_0$ en $I \times J$ es una solución trivial de (4).

Análogamente, si $x_0 \in P_2^{-1}(0)$ se tiene que $dx_0 \equiv 0$. Reemplazando $x \ = \ x_0$ en (4) se tiene que el segmento de la recta $x \ = \ x_0$ en $I \times J$ es también una solución trivial de (4).

Nótese que si ambos números reales $x_0 \in I, y_0 \in J$ existen, entonces (x_0, y_0) es una singularidad de (4). La Fig. 1 muestra este resultado.

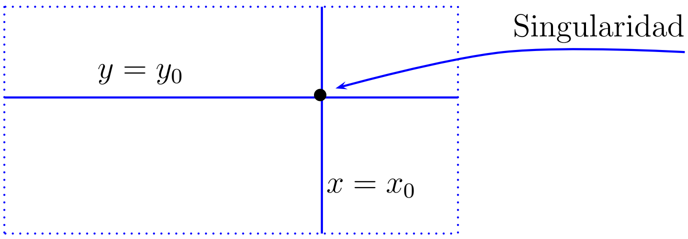


Fig. 1

Comentario : Los segmentos de rectas que son soluciones de la Forma Diferencial (4) en el rectángulo $I \times J$, dividen el rectángulo en subrectángulos abiertos (sin considerar las fronteras) . Si $P_1(x)Q_1(y), P_2(x)Q_2(y) \neq 0$ en los subrectángulos, la F.D. se puede escribir como Ecuaciones Diferenciales de la forma del Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_1(x)Q_1(y)}{P_2(x)Q_2(y)} \text{ , o bien, } \frac{dx}{dy} = -\frac{P_2(x)Q_2(y)}{P_1(x)Q_1(y)}$$

Entonces, dado un punto en cada subrectángulo abierto, existe una única solución de la F.D. por el punto.

¿ Soluciones en los subrectángulos ?

Consideremos condiciones iniciales en puntos $(x, y) \in I \times J$, tales que $x \notin P_2^{-1}(0)$ y $y \notin Q_1^{-1}(0)$. Entonces (4) es equivalente a la forma:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy \;=\; 0$$

Sean , $F(x) \;=\; \displaystyle\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx$, $G(y) \;=\; \displaystyle\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$ respectivas funciones primitivas.

Consideremos la función

$$H : I \times J - P_2^{-1}(0) \times Q_1^{-1}(0) \to \mathbb{R} \quad \text{tal que} \quad H(x, y) \;=\; F(x) + G(y)$$

Las curvas de nivel de H son soluciones de (4) (ver Fig. 2), pues si $H(x, y) = c$ es la ecuación de un curva de nivel (no vacía), entonces

$$dH(x, y) \;\equiv\; dc \equiv 0 \Longrightarrow \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy \;\equiv 0$$

En consecuencia en $I \times J - P_2^{-1}(0) \times Q_1^{-1}(0)$ se satisface la identidad;

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy \;\equiv\; 0$$

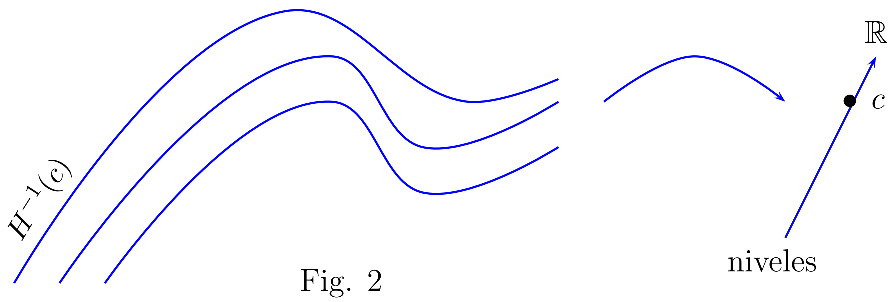


Fig. 2

Ejemplo 1.- Describir, cualitativamente en el plano xy, todas las soluciones de la Forma Diferencial (F.D.)

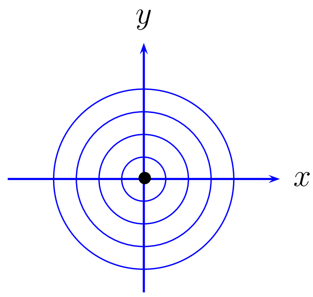
$$xdx + ydy \;=\; 0$$

Respuesta: Es claro que el punto $(0,0)$ es la única singularidad.

Como las variables de la F.D. están separadas y las integrales son inmediatas, se tiene que las curvas de nivel $H(x,y) \;=\; cte$ están dadas por

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \;=\; cte$$

Con el objeto de simplificar la expresión anterior y sin pérdida de generalidad podemos elegir $cte \;=\; \frac{c}{2}$ con $c \in \mathbb{R}$. Las soluciones son como indica la Fig. 3. Este tipo de singularidades rodeadas por curvas cerradas no aisladas recibe el nombre de Centro.



Centro. Fig. 3

Ejemplo 2.- Describir, cualitativamente en el plano xy, todas las soluciones de la Forma Diferencial (F.D.)

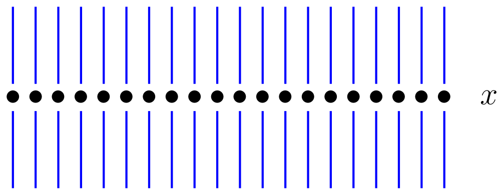
$$\lambda_1 xdy - \lambda_2 ydx \;=\; 0 \;\;,$$

donde, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, son parámetros no simultáneamente nulos.

Respuesta:

i) Si $\lambda_1 = 0$, la F.D., se reduce a la expresión $ydx = 0$ pues $\lambda_2 \neq 0$. Es inmediato que la recta $y = 0$ es un continuo de singularidades.

¿ Otras soluciones? Si $y \neq 0$, la F.D., es equivalente a $dx = 0$, de donde es inmediato que las semi rectas $x = c, y > 0$ y $x = c, y < 0$ con c constante son todas las soluciones restantes (ver Fig. 4).



Caso $\lambda_1 = 0$, Fig. 4

ii) Sea $\lambda_1 \neq 0$, entonces la F.D., equivalentemente, es del tipo

$$xdy - \alpha ydx \ = \ 0 \ , \quad \text{con} \ \ \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{R}.$$

La recta $x = 0$, claramente es solución pues el número real cero anula el coeficiente de la diferencial dy y además $dx = d0 = 0$. Análogamente la recta $y = 0$ también es solución.

¿ Otras soluciones? Consideremos puntos en el plano xy no incidentes en las dos soluciones triviales anteriores, es decir, si $xy \neq 0$. En este caso la F.D., se puede escribir con las variables separadas

$$\frac{dy}{y} - \alpha\frac{dx}{x} \ = \ 0$$

Integrando se tiene

$$\ln|y| - \alpha \ln|x| \ = \ \ln c \ \ , \quad \text{con} \ \ c > 0$$

Equivalentemente, usando las propiedades del logaritmo las soluciones son:

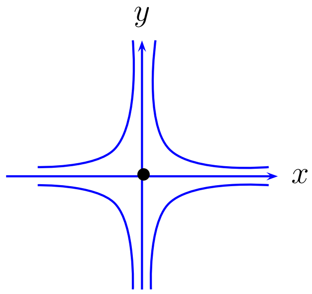
$$|y| \ = \ c|x|^{\alpha} \ \ , \ \ c > 0 \, .$$

Nótese que en los semi planos superior e inferior las soluciones son

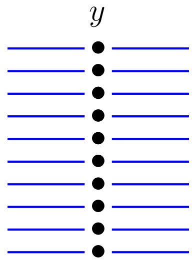
(5) $$y \ = \ c|x|^{\alpha} \ \ , \quad y \ = \ -c|x|^{\alpha} \, , \ \ c > 0 \ \ \text{respectivamente.}$$

Como el parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ se presentan, considerando las dos soluciones triviales mencionadas más arriba, cualitativamente los siguientes casos:

1) Si $\alpha < 0$, cualitativamente las gráficas de (5) son arcos como indica la Fig. 5, por ejemplo si $\alpha = -1$. Este tipo de singularidades se llama Silla.

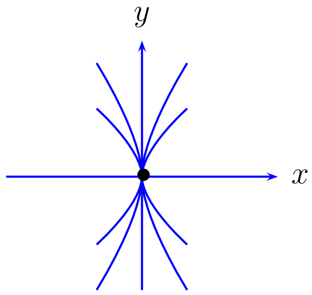


Caso $\alpha < 0$, Fig. 5

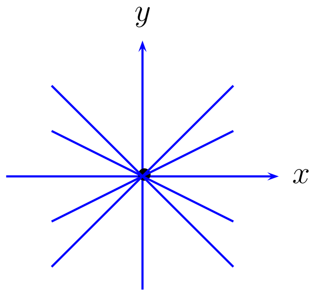


Caso $\alpha = 0$, Fig. 6

2) Si $\alpha = 0$, las soluciones son semi rectas $y = c,\ y = -c,\ c \in \mathbb{R} - \{0\}$ con $x \neq 0$. La recta $x = 0$ es claramente un continuo de singularidades pues la F.D. (ii), se reduce a la expresión $xdy = 0$ (ver Fig. 6).
3) Si $0 < \alpha < 1$, cualitativamente las gráficas de (5) son arcos como indica la Fig. 7, por ejemplo si $\alpha = \frac{1}{2}$. Este tipo de singularidades se llama Nodo de dos tangentes pues las soluciones extendidas al origen son tangentes a dos rectas.

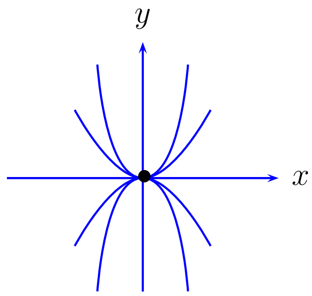


Caso $0 < \alpha < 1$, Fig. 7



Caso $\alpha = 1$, Fig. 8

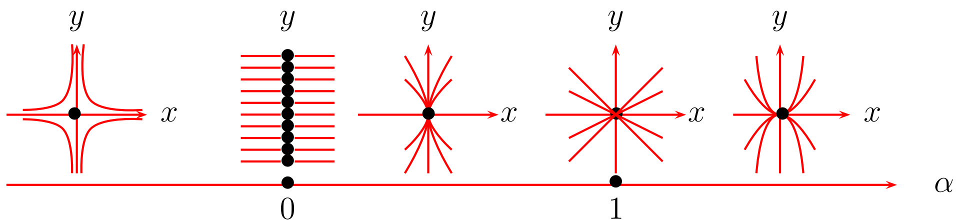
4) Si $\alpha = 1$, las soluciones (5), son semi rayos $y = cx,\ y = -cx,\ c \in \mathbb{R} - \{0\}$ con $x \neq 0$. Extendiendo los semi rayos al origen se tiene la Fig. 8. Este tipo de simgularidades se llama Nodo Estelar.
5) Si $\alpha > 1$, cualitativamente las gráficas de (5) son arcos como indica la Fig. 9, por ejemplo si $\alpha = 2$. Este tipo de singularidades es un Nodo de dos tangentes pues las soluciones extendidas al origen son tangentes a uno de los ejes coordenados.



Caso $\alpha > 1$, Fig. 9

Comentario.- En textos más avanzados se demuestra que los cinco casos anteriores, excepto el caso 2), son cualitativamente equivalentes, en el sentido que para cada par de los respectivos tipos de singularidades existe una función biyectiva continua con función inversa también continua del plano en el plano que transforma un tipo de singularidad en el otro. Intuitivamente la afirmación anterior se puede percibir si se piensa que las respectivas gráficas se encuentran en un plano elástico y que por deformación continua del plano se lleva una forma de singularidad en la otra. En un lenguaje más técnico las funciones anteriores se llaman homeomorfismo.

Resumen: El siguiente diagrama es un resumen de los tipos cualitativos de soluciones, que aparecen alrededor del origen, del ejercicio propuesto en términos del signo del parámetro α.



Ejercicio.- Estudiar la forma diferencial

$$(\beta x + \alpha y)dx - (\alpha x - \beta y)dy \; = \; 0 \, ,$$

donde α, β son parámetros reales con $\beta > 0$.

Respuesta: La forma diferencial no es de variables separables, sin embargo, veremos que mediante un cambio de coordenadas, se puede reducir a una forma diferencial de variables separables. Es inmediato que el origen del sistema de coordenadas es un punto de equilibrio. Para estudiar las restantes soluciones consideremos el sistema de coordenadas polares y las ecuaciones de transformación

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} dx = dr\cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta \\ \\ dy = dr\,\mathrm{sen}\,\theta + r\cos\theta d\theta \quad , \quad r > 0 \end{array}$$

Reemplazando en la F.D. y reordenado se tiene la F.D. de variables separables:

$$\beta r dr - \alpha r^2 d\theta \;=\; 0$$

Como $r > 0$ y $\beta > 0$ equivalentemente se tiene:

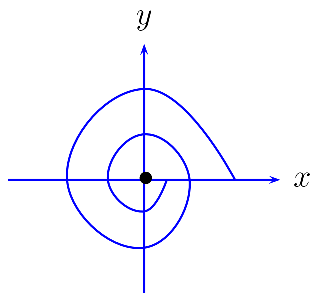
$$\beta \frac{dr}{r} - \alpha d\theta \;=\; 0 \;,\; \text{o bien} \;\;,\;\; \frac{dr}{r} - \frac{\alpha}{\beta} d\theta \;=\; 0 \;,\; \text{o bien} \;\;,\;\; \frac{dr}{r} - \gamma d\theta \;=\; 0 \;,\; \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}.$$

Integrando, las soluciones diferentes de la singularidad en el origen son:

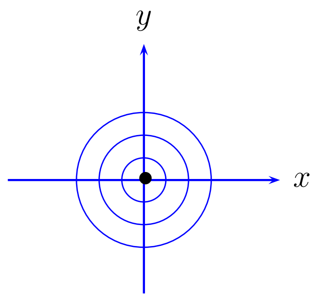
$$r \;=\; c e^{\gamma\theta} \;\;,\;\; c > 0 \;\;,\;\; \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Como el parámetro $\gamma \in \mathbb{R}$ se presentan, considerando la singularidad en el origen, cualitativamente los siguientes casos:

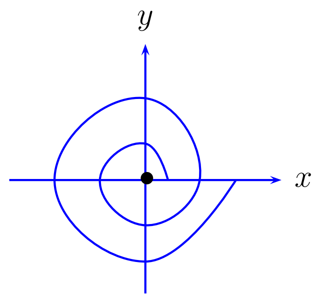
i) Si $\gamma < 0$, las soluciones en (6) son espirales que tienden a la singularidad, rotando en sentido positivo, ver Fig. 10. Este tipo de singularidades se llama Pozo.



Caso $\gamma < 0$, Fig. 10



Caso $\gamma = 0$, Fig. 11



Caso $\gamma > 0$, Fig. 12

ii) Si $\gamma = 0$, las soluciones en (6) son circunferencias concéntricas que rotan en sentido positivo alrededor de la singularidad, ver Fig. 11. Este tipo de singularidades es un Centro pues se trata de curvas cerradas no aisladas alrededor de la singularidad.

iii) Si $\gamma > 0$, las soluciones en (6) son espirales que se alejan de la singularidad, rotando en sentido positivo, ver Fig. 12. Este tipo de singularidades se llama Fuente.

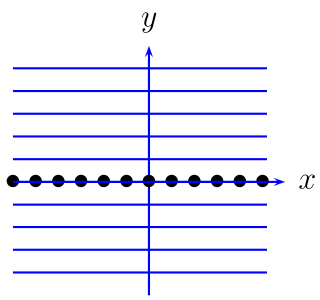
Comentario: Se observa en las Figs. 10, 11, 12, que $\gamma = 0$ es una frontera de los valores del parámetro que separa comportamientos cualitativos de la singularidad, el cambio de Pozo a Fuente (o viceversa). Por esta razón, en la Teoría de Bifurcaciones, se define $\gamma = 0$ como un valor de bifurcación del parámetro.

Ejercicio.- Describir, cualitativamente en el plano xy, todas las soluciones de la Forma Diferencial (F.D.)

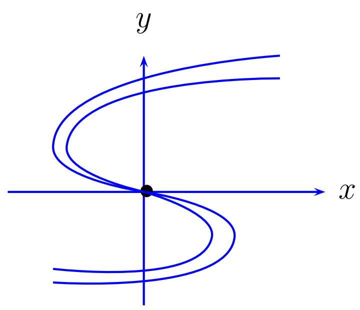
$$\lambda y dx - (\lambda x + y) dy \;=\; 0 \;\;,\;\; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Respuesta:

i) Si $\lambda = 0$ la F.D., se reduce a la expresión $ydy = 0$. La recta $y = 0$ es una recta de singularidades y las rectas $y = c$, con c constante no nula, son las soluciones restantes, ver Fig. 13.



Caso $\lambda = 0$, Fig. 13



Caso $\lambda \neq 0$, Fig. 14

ii) Si $\lambda \neq 0$, la F.D. se puede escribir

$$yd(\lambda x) - (\lambda x + y)dy \;=\; 0 \;\; .$$

En esta F.D., es posible prescindir del parámetro λ sin pérdida de generalidad. Cambiando x por $\frac{x}{\lambda}$, es decir reescalando el eje x se tiene un cambio de coordenadas. En consecuencia la nueva F.D.

$$ydx - (x + y)dy \;=\; 0 \;\; , \tag{7}$$

es cualitativamente equivalente a la planteada en el ejercicio

Es claro que $(0, 0)$ es la única singularidad y las semi recta $y = 0$ con $x \neq 0$ son soluciones triviales. ¿ Otras soluciones ?

La F.D. (7) no es de variables separables, sin embargo, consideremos el cambio de variables

$$T \;:\; \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & u \\ y & = & uv \end{array} \right. \quad , \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2. \tag{8}$$

Donde el Jacobiano de la transformación T está dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \;=\; \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ v & u \end{array} \right| \;=\; u$$

El cambio de variables (8), sólo define cambios de coordenadas en los semiplanos izquierdo y derecho pues el Jacobiano se anula en la recta $u = 0$. Nótese que $T(0, v) = (0, 0)$. Geométricamente esta igualdad significa que el cambio de variables lleva la recta $u = 0$ del plano uv en el punto $(0, 0)$, origen del plano xy, ver Fig. 15, o bien, la preimagen del origen del plano xy es una recta en el plano uv. Por esta razón se dice que el punto se abre a una recta. Este tipo de transformaciones en cursos más avanzados recibe el nombre de *blowing-up*.

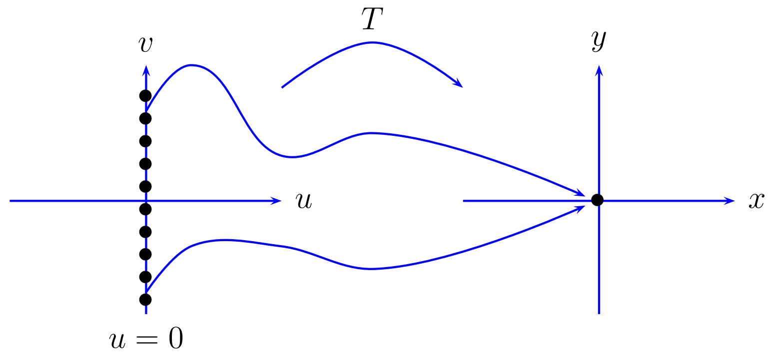


Fig. 15

Reemplazando el cambio de variables (8) en la F.D. (7) se obtiene

$$uvdu - u(1+v)d(uv) \;=\; 0$$

o bien, reordenado los términos

$$uv^2du + u^2(1+v)dv \;=\; 0$$

Es inmediato que $u = 0$ es una recta de singularidades y los semi ejes de $v = 0$ con $u \neq 0$ son soluciones. ¿ Otras soluciones ?

Si $u \neq 0$ y $v \neq 0$, la expresión anterior se reduce a la F. D. de variables separables

$$\frac{du}{u} + \frac{(1+v)}{v^2}dv \;=\; 0$$

Integrando se tiene que las soluciones de la F.D. de anterior están dadas por

(9) $$|uv| \;=\; ce^{\frac{1}{v}} \;\;,\;\; c > 0 \;\;,\;\; u, v \neq 0$$

Para $u \neq 0$, el cambio de variables (8) es un cambio de coordenadas pues el Jacobiano no se anula. Las ecuaciones de la transformación inversa son:

$$\begin{cases} u &= x \\ v &= \frac{y}{x} \end{cases} \;\;,\;\; x \neq 0.$$

Cualitativamente las gráficas de las ecuaciones (9) en el plano uv, son equivalentes a las gráficas de las respectivas ecuaciones transformadas en el plano xy con $x \neq 0$, es decir, a las gráficas de

$$y \;=\; ce^{\frac{x}{y}} \;\;, \qquad \text{ver Fig. 14}$$

Este tipo de singularidades se llama Nodo de una tangente, pues las gráficas de las soluciones extendidas al origen son tangentes a sólo una recta.

Comentario: En general, el cambio de variables (8) permite transformar a F.D. de Variables Separables, una F.D. donde las funciones P, Q de (1) tienen la propiedad de homogeniedad

$$f(\lambda x, \lambda y) \;=\; \lambda^p f(x,y)$$

Ejercicio 1. *Sean las formas diferenciales :*

$$\begin{array}{lrcl} 1) & (x+2y-1)dx+(2x+5)dy & = & 0 \\ 2) & (x+5y-1)dx-(x-3y)dy & = & 0 \\ 3) & 2(2x-3y-2)dx+(6x+y-2)dy & = & 0 \end{array}$$

Responder las siguientes preguntas:

i) *¿ Cuáles son las coordenadas del punto singular ?.*
ii) *Considere una traslación de la singularidad al origen.*
iii) *Encuentre un cambio de coordenadas, de tal suerte que la forma diferencial en las nuevas coordenadas sea una expresión más simple de variables separables.*
iv) *Resolver la forma diferencial anterior.*
v) *Bosquejar cualitativamente en el plano xy, como son las soluciones de la forma diferencial original.*
vi) *¿ Cuál es el nombre de este tipo de singularidades ?.*

Ejercicio 2. *Sea la Forma Diferencial,* $(\alpha \mathbf{x}+\mathbf{y})\mathbf{dx}-(\mathbf{x}-\alpha\mathbf{y})\mathbf{dy}=\mathbf{0}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

i) *Resolver explícitamente la Forma Diferencial.*
Indicación. Considere Coordenadas Polares.
ii) *Describa cualitativamente, el tipo de soluciones que admite la F.D. para valores:* **negativos, nulo y positivos** *del parámetro α.*

Ejercicio 3. *Sea la Forma Diferencial* $(x^4-4y^2)dx+4xydy \ = \ 0.$

i) *Usando el cambio de variables $x=u, y=uv$,* **resolver** *la F.D.*
ii) **Interpretando la imágen** *de la recta $u=0$ bajo el cambio de variables , haga un bosquejo cualitativo de las soluciones de la F.D. en el plano xy.*

Ejercicio 4. *Sea el sistema:* $\left\{\begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & -2x^5y \\ \frac{dy}{dt} & = & 5x^4y^2 \end{array}\right.$

i) *Encontrar una Ecuación de Variables Separables asociada al sistema y resolverla*
ii) *Haga un bosquejo cualitativo de las soluciones de i).*

References

[1] D.K.Arrowsmith & C.M.Place. *Ordinary differential equations.* Chapman and Hall . London, New York. 1982
[2] . P.Blanchard, R.L.Devaney and G.R.Hall. *Ecuaciones diferenciales.* Boston University.International Thomson Editores. 1998
[3] . Jacob Palis Jr., Welington de Melo. *Intodução aos sistemas dinâmicos.* IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. Proyecto Euclides. 1977.
[4] . Jorge Sotomayor. *Liçóes de equaçóes diferenciais ordinárias.* IMPA, Rio de Janeiro, Brasil. Proyecto Euclides. 1979.