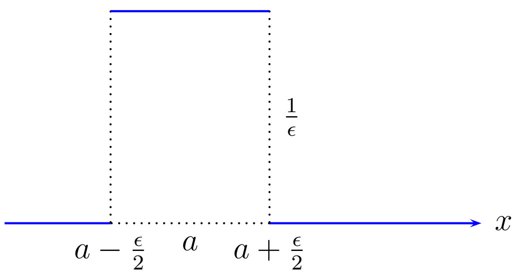
DELTA DE DIRAC . NOCIONES BÁSICAS

E. SÁEZ

Consideremos la gráfica de la función $h_\epsilon(x-a)$ definida por la Fig. 1:



$, a \in \mathbb{R}\ ,\ \epsilon > 0.$

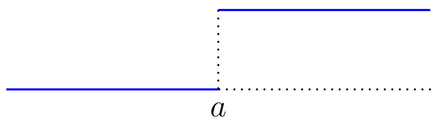
Fig. 1

Formalmente, dado $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, la función definida por la Fig. 1, está dada por:

$$h_\epsilon(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a - \frac{\epsilon}{2}, x > a + \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1}{\epsilon} & \text{si} \quad a - \frac{\epsilon}{2} < x < a + \frac{\epsilon}{2}, \end{cases}$$

o bien, en término de la función Escalón de Heaviside:

$$\mu(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a \\ 1 & \text{si} \quad x \geq a \end{cases} \quad ,$$



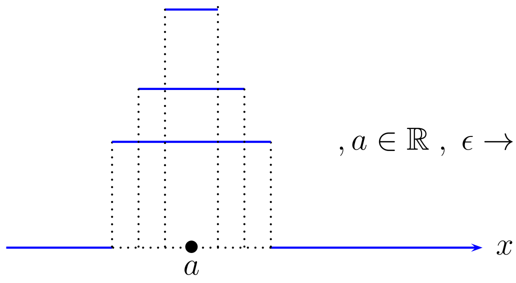
$$h_\epsilon(x-a) = \left[\mu(x-a+\frac{\epsilon}{2}) - \mu(x-a-\frac{\epsilon}{2})\right]\frac{1}{\epsilon}.$$

Es simple comprobar que para todo $\epsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} h_\epsilon(x-a)dx = \int_{a-\frac{\epsilon}{2}}^{a+\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{\epsilon}dx = 1$. Luego es inmediato que:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} h_\epsilon(x-a)dx = 1.$$

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

La Fig. 2 , muestra gráficamente, el proceso al límite de la Fig. 1.



$, a \in \mathbb{R}\ ,\ \epsilon \to 0.$

Fig. 2

El proceso anterior suguiere definir un paso al límite, preservando las dos propiedades siguientes:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq a \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx & = \quad 1 \end{cases} \tag{1}$$

Delta de Dirac

Comentario Importante: Nótese que el Delta de Dirac , !! no es!! una función en el sentido usual del Cálculo . Las dos propiedades de la definición en (1), están en contradicción con los resultados del Cálculo pues se sabe que una función idénticamente nula excepto un punto tiene siempre integral cero, en lugar de uno. Más exactamente:

$$f(x) = 0, \forall x \neq a \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} f(x)dx}_{0} + \underbrace{\int_{a}^{\infty} f(x)dx}_{0} = 0,\ a \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior significa que no es posible aplicar los resultados del Cálculo, al Delta de Dirac, pues este no satisface la hipótesis básica de tratarse de una función en el sentido ordinario del Cálculo Integral.

En lo que sigue veremos un nuevo concepto, que explica en forma más clara que es realmente el Delta de Dirac.

Definición 1. *Una función φ, se llama de tendencia rápida a cero y escribiremos $\varphi \xrightarrow{rap} 0$, si es definida como, $\varphi : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$, de clase C^∞ y tiene la propiedad:*

$$\lim_{|x| \to \infty} \varphi^{(n)}(x)x^m = 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Comentario: El valor nulo del límite anterior, significa que la función φ y todas sus derivadas tienen la propiedad de tender a cero más rápido que cualquier crecimiento de las potencia de x^n con $n \in \mathbb{N}_0$, cuando $|x|$ es muy grande. Geométricamente la propiedad significa que la gráfica de φ y las gráficas de todas las derivadas $\varphi^{(n)}$, para $|x|$ muy grande se confunden con el eje x , ver Fig. 3.

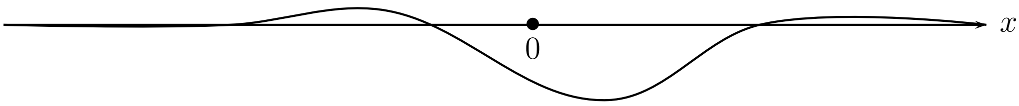


Fig. 3

Comentario: Las integrales impropias de las funciones, $\varphi \xrightarrow{rap} 0$ *y en general de las funciones derivadas* $\varphi^{(n)} \xrightarrow{rap} 0, n \in \mathbb{N}_0$ *, siempre existen , pues para* $K > 0$ *suficientemente grande*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{(n)}(\xi) d\xi \approx \int_{-K}^{K} \varphi^{(n)}(\xi) d\xi$$

El conjunto $\Omega = \{\varphi | \varphi \xrightarrow{rap} 0\}$ *con las leyes usuales para suma de funciones y multiplicación por escalares , es decir , con las operaciones para funciones de sumas de imágenes y multiplicación de imágenes por escalares , más exactamente:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\varphi + \psi)(\xi) & = & \varphi(\xi) + \psi(\xi) \\ (\alpha\varphi)(\xi) & = & \alpha\varphi(\xi) \end{array} \right. , \qquad \alpha \in \mathbb{R} \ , \ \xi \in (-\infty, \infty),$$

es un Espacio Vectorial Real. Geométricamente, podemos interpretar los vectores del espacio Ω *como simples curvas y que corresponden a las gráficas de las funciones* $\varphi^{(n)} \xrightarrow{rap} 0, n \in \mathbb{N}_0$.

Definición 2. *Cualquier aplicación Lineal*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} T & : & \Omega \to \mathbb{R} \\ & & \varphi \mapsto T(\varphi) \end{array}}$$ *, se llama* **Distribución**

Intuitivamente: una Distribución es simplemente una aplicación, que preserva la suma y multiplicación por escalar de Ω *, y que a cada curva de* Ω *se le asocia un único escalar como imágen.*

Observación . Nótese que por definición $dom(T) = \Omega$ *, es decir, el dominio de las distribuciones es el conjunto de las funciones* $\varphi \xrightarrow{rap} 0$*, diferencia fundamental con las funciones ,* f*, en el sentido del Cálculo Diferencial donde el dominio* $dom(f) \subset \mathbb{R}$ *, o bien , en el caso de funciones de varias variables* $dom(f) \subset \mathbb{R}^n$ *.*

Definición 3. *Dos distribuciones* $T_1, T_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ *son iguales si y sólo si*

$$\forall \varphi \in \Omega, \ T_1(\varphi) = T_2(\varphi)$$

Nótese que la idea de igualdad para distribuciones es simplemente, la idea usual para funciones (se asocia a cada elemento en el dominio la misma imágen).

Ejemplo 1. *Sea la función seno de la Trigonometría, sen* : $(-\infty, \infty) \to [-1, 1]$. *Entonces es posible asociar a la función seno una distribución , ¿ Cómo ?.*

Es inmediato que la integral impropia siguiente converge ya que

$$\Big| \int_{-\infty}^{\infty} sen(\xi)\varphi(\xi)d\xi \Big| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Big|sen(\xi)\Big|\Big|\varphi(\xi)\Big| d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \Big|\varphi(\xi)\Big| d\xi < \infty$$

Luego, tiene sentido definir la Distribución seno

$$T_{sen} : \Omega \to \mathbb{R} \ , \ tal \ que \ , T_{sen}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} sen(\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

La Distribución T_{sen} significa que a cada curva de Ω , usando la convergencia de la integral impropia, se le asocia un número real como muestra geométricamente la Fig. 4.

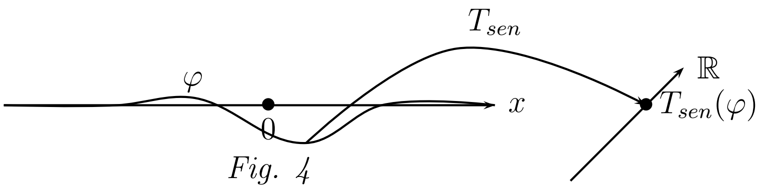


Fig. 4

La propiedad de linealidad de T_{sen}, es consecuencia inmediata de las propiedades de las integrales convergentes y se tiene:

$$\begin{cases} T_{sen}(\varphi + \psi) &= T_{sen}(\varphi) + T_{sen}(\psi) \\ T_{sen}(\alpha\varphi) &= \alpha T_{sen}(\varphi) \ , \ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

La distribución T_{sen} , se llama Función Seno Generalizada.

Definición 4. *Sea $a \in \mathbb{R}$. La aplicación* **Delta de Dirac** *es simplemente la distribución definida por:*

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \delta_a & : & \Omega \to \mathbb{R} \\ & & \varphi \mapsto \delta_a(\varphi) \end{array}} \quad , \ donde \ , \ \delta_a(\varphi) = \varphi(a).$$

Comentario: Geométricamente, el Delta de Dirac δ_a, es la distribución que asocia, a cada curva $\varphi \in \Omega$ la segunda coordenada del punto $(a, \varphi(a))$ de la curva . Nótese que el Delta de Dirac no considera para nada la gráfica de la curva φ para puntos con abscisa $x \neq a$, ver Fig. 5.

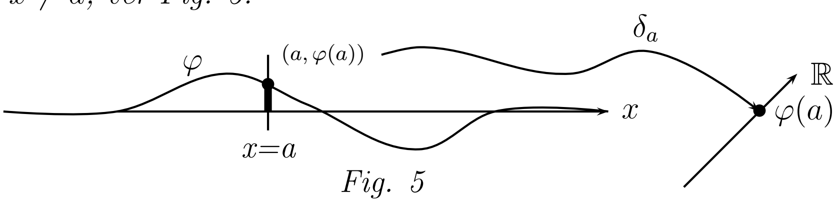


Fig. 5

Sabemos que la distribución Delta de Dirac no es una función en el sentido ordinario del Cálculo. ¿ Qué sentido tiene una integral que involucre un Delta de Dirac ?. Para responder esta pregunta y usando la definición misma del Delta de Dirac tiene sentido definir:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\varphi(x)dx := \delta_a(\varphi) = \varphi(a) \ \ , \ \ \forall \varphi \in \Omega, a \in \mathbb{R}.}$$

Observación. 1) Como δ_a, no es en el sentido usual del Cálculo, una función de una variable . La integral anterior, tampoco es una integral en el sentido ordinario del Cálculo Integral.

2) Nótese que por la definición anterior , el resultado de la integral es simplemente el único valor puntual que considera el Delta de Dirac, es decir, la imágen en el punto a de la función φ.

Con argumentos más avanzados que lo de estas notas, se demuestra que la definición anterior se puede extender a funciones continuas y se tiene:

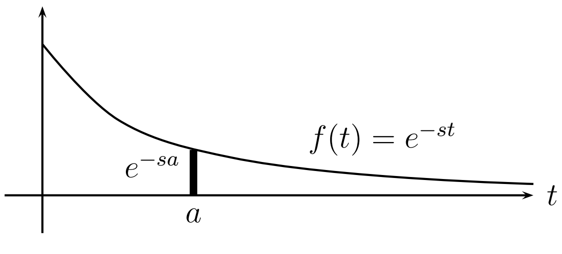
$$\boxed{f \in C^o \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx := f(a) \ \ , a \in \mathbb{R}.} \tag{2}$$

Aplicación interesante: *La Transformada de Laplace de una función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, seccionalmente continua y mayorada por una exponencial se define por la integral*

$$\mathscr{L}[f](s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \ \ , \ \ \forall s > s_0$$

Si $a \geq 0$. ¿ Qué sentido tiene considerar $\mathscr{L}[\delta_a](s) = \int_0^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}dt$?. La fórmula (2) le da sentido a las integrales que contienen el Delta de Dirac, en efecto, si $f = \delta_a$ en la fórmula anterior , el valor de la integral de la fórmula (2) dice que el resultado es simplemente el valor puntual de la exponencial en el punto a , es decir

$$\mathscr{L}[\delta_a](s) = \delta_a(e^{-st}) = e^{-sa} \ \ , \ \ a \geq 0 \ \ , \ \ \textit{(ver Fig. 6)}$$



En particular si $a = 0$, la exponencial es la función constante $e^{0t} \equiv 1$, en consecuencia $\mathscr{L}[\delta_0](s) = 1$

Análogamente a la aplicación anterior, es posible dar sentido a la Transformada de Fourier de funciones continuas.

Aplicando la fórmula (2) al Delta de Dirac:

$$\mathscr{F}[\delta_a](\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)e^{-i\lambda x}dx = e^{-i\lambda a} \quad , \; a \in \mathbb{R}$$

En particular si $a = 0$, $\mathscr{F}[\delta_0](\lambda) := \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-i\lambda x}dx = e^{-i\lambda 0} \equiv 1$

Recordando la Transformada Inversa de Fourier, $\mathscr{F}^{-1}[e^{-i\lambda a}](x) = \delta(x-a)$ *, de donde:*

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda a}e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi a}e^{i\xi x}d\xi$$

Cambiando en la segunda integral, $x \to -\lambda$*, se tiene:*

$$\delta(-\lambda-a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi a}e^{-i\xi\lambda}d\xi$$

Pero $\delta(-\lambda-a) = \delta(\lambda+a)$*, de donde es inmediato que*

$$\mathscr{F}[e^{-i\xi a}](\lambda) = \delta(\lambda+a) \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

1. Derivada de una distribución

El concepto ordinario de derivada, como límite de una razón de cambios, no es aplicable a las distribuciones ya que las distribuciones no son funciones en el sentido ordinario del Cálculo Diferencial.

Sabemos que si $\varphi \in \Omega$*, entonces la derivada ordinaria del Cálculo Diferencial de* φ *es tambien una función* $\varphi' \in \Omega$*. En consecuencia bajo una distribución* T*, la imágen* $T(\varphi') \in \mathbb{R}$ *. Esta propiedad permite definir la derivada de una distribución como otra distribución mediante el siguiente concepto.*

Definición 5. *Supongamos una distribución* $T : \Omega \to \mathbb{R}$ *, tal que,* $\varphi \mapsto T(\varphi)$ *. Entonces la distribución* $T' : \Omega \to \mathbb{R}$ *, tal que ,* $\varphi \mapsto -T(\varphi')$ *se llama Primera Derivada de la distribución* T*.*

Ejemplo 2. *Del Cálculo Diferencial se tiene que* $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) \equiv \cos x$*. ¿ Cuál es la derivada de la función seno en el sentido Distribucional ?.*

Consideremos la Distribución T_{sen} *del Ejemplo 1, entonces la derivada Distribucional por la definición anterior está dada por*

$$T'_{\text{sen}} : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad \textit{tal que} \; , \; T'_{\text{sen}}(\varphi) = -T_{\text{sen}}(\varphi')$$

Pero

$$\left\{\begin{array}{lcl} -T_{\text{sen}}(\varphi') & = & -\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen} x\varphi'(x)dx \quad , \; \textit{integrando por partes} \; , \\ & = & -\Big[\operatorname{sen} x\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \cos x\varphi(x)dx \Big] \\ & = & \int_{-\infty}^{\infty} \cos x\varphi(x)dx \\ & = & T_{\cos}(\varphi) \end{array}\right.$$

Por el cálculo anterior, $T'_{\text{sen}}(\varphi) = T_{\cos}(\varphi)$, $\forall \varphi \in \Omega$. *Luego por la Definición 3.* $T'_{\text{sen}} \equiv T_{\cos}$.

Pregunta Interesante: *¿ Las derivadas tanto en el sentido del Cálculo como en el sentido de las funciones generalizadas es análogo al ejemplo anterior ?*

Respuesta: Consideremos la función Escalón de Heaviside. La derivada de la función de Heaviside en el sentido del Cálculo Diferencial está dado por:

$$\mu'(x-a) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a, x > a \\ \nexists & si \quad x = a \end{cases}$$

La derivada de la función Escalón en el sentido distribucional por la Definición 5 está dada por:

$$T'_{\mu_a} : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad tal\ que\ , \ T'_{\mu_a}(\varphi) = -T_{\mu_a}(\varphi')$$

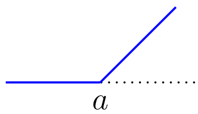
Pero

$$\begin{cases} -T_{\mu_a}(\varphi') & = & -\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x-a)\varphi'(x)dx \\ & = & -\int_{a}^{\infty} \varphi'(x)dx \\ & = & -\varphi(x)\Big|_a^{\infty} \\ & = & \varphi(a) \\ & = & \delta_a(\varphi) \end{cases}$$

Por el cálculo anterior, $T'_{\mu_a}(\varphi) = \delta_a(\varphi)$, $\forall \varphi \in \Omega$. *Luego por la Definición 3.* $T'_{\mu_a} \equiv \delta_a$.

Ejemplo 3. *La función Rampa se define por:*

$$r(x-a) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ x-a & si \quad x \geq a \end{cases} \quad ,$$



La derivada de la función Rampa en el sentido del Cálculo Diferencial está dada por:

$$r'(x-a) = \begin{cases} 0 & si \quad x < a \\ \nexists & si \quad x = a \\ 1 & si \quad x > a \end{cases}$$

Si T_{r_a} *designa la Distribución Rampa (función Rampa generalizada) , su derivada en el sentido distribucional, por la Definición 5, está dada por:*

$$T'_{r_a} : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad tal\ que\ , \ T'_{r_a}(\varphi) = -T_{r_a}(\varphi')$$

Pero

$$\begin{cases} -T_{r_a}(\varphi') & = & -\int_{-\infty}^{\infty} r(x-a)\varphi'(x)dx \\ & = & -\int_{a}^{\infty} (r-a)\varphi'(x)dx \\ & = & -\left[(x-a)\varphi(x)\Big|_a^{\infty} - \int_a^{\infty} \varphi(x)dx\right] \\ & = & \int_a^{\infty} \varphi(x)dx \\ & = & \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x-a)\varphi(x)dx \\ & = & T_{\mu_a}(\varphi) \end{cases}$$

Por el cálculo anterior, $T'_{r_a}(\varphi) = T_{\mu_a}(\varphi)$, $\forall\varphi \in \Omega$. *Luego por la Definición 3.* $T'_{r_a} \equiv T_{\mu_a}$.

Observación: Nótese que $T''_{r_a} = T'_{\mu_a} = \delta_a$

Ejemplo 4. *Ejemplo interesante*

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función , tal que* $\lim_{|x|\to\infty} f(x)\varphi(x) = 0, \forall\varphi \in \Omega$, *de clase* C^1, *salvo en el punto* $a \in \mathbb{R}$ *donde* f *tiene una discontinuidad de primera clase (discontinuidad de salto). Sea* $h(a) = f(a^-) - f(a^+) \in \mathbb{R}$ *el salto en el punto (ver Fig. 6)*

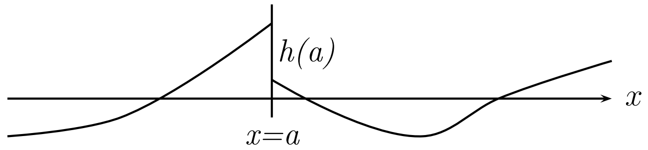


Fig. 6

y consideremos ; $\begin{array}{rcl} T_f & : & \Omega \to \mathbb{R} \\ & & \varphi \mapsto T_f(\varphi) \end{array}$ *, la función generalizada de f.*

Entonces la derivada en el sentido de las distribuciones:

$$\begin{aligned} T'_f(\varphi) &= -T_f(\varphi') \\ &= -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx - \int_a^\infty f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\left[f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx + f(x)\varphi(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(x)\varphi(x)dx \right] \\ &= -\left[f(a^+)\varphi(a) - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx - f(a^-)\varphi(a) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx + \left[f(a^-) - f(a^+) \right]\varphi(a) \\ &= T_{f'}(\varphi) + h(a)\delta_a(\varphi) \quad , \ \forall\varphi \in \Omega \end{aligned}$$

Luego , $T'_f = T_{f'} + h(a)\delta_a$.

References

[1] Nino Boccara. *Distributions* . Ellipses . Collection Mathématiques pour L'Ingénieur. 1997.
[2] Laurent Schwartz.*Mathematics for the Physical Sciences*. Dover Publications, Inc. Mineola, New York. 1966
[3] Laurent Schwartz. *Theorie des Distributions*. Paris, Hermann, 1966.