GEOMETRÍA DE LAS CÓNICAS

E. SÁEZ

Del estudio de cursos básicos sobre las cónicas, se sabe que las representaciones geométricas de las soluciones de una ecuación polinomial (algebraica) de segundo grado a dos variables son la Hipérbola , Parábola, Elipse , o bien, degeneraciones de estas curvas.

En estos apuntes se pretende clasificar cualitativamente, las representaciones geométricas de las soluciones de una ecuación polinomial (algebraica) a dos variables en el plano cartesiano. Las figuras que aparecen las llamaremos Curvas Cuádraticas. En los casos no degenerados, que existen, son llamadas genéricamente Cónicas.

La expresión más general de una ecuación polinomial de segundo grado a dos variables reales es de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

Los coeficientes de los términos de segundo grado de la cuadrática (1) son:
$a, b, c \in \mathbb{R}$ y supondremos que los tres coeficientes de los términos de segundo grado no se anulan simultáneamente, pues en caso contrario, (1) deja de ser cuadrática y es a lo más una expresión lineal en las variables. También supondremos que los coeficientes de los términos lineales y el término constante , d, e, f, son números reales sin restricción.

La idea general que usaremos para el estudio de las posibles gráficas es conseguir expresiones más sencillas, cualitativamente equivalentes , usando para este propósito solamente: Traslaciones, Rotaciones y Reescalamientos de las figuras, manteniendo siempre el mismo sistemas de coordenadas.

Para mantener el sistema de coordenadas, consideremos los reemplazos de las variables dadas por:

$$\{x \to x - h, y \to y - k\} \quad , \quad h, k \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Geométricamente, para entender el efecto sobre las gráficas en el plano veamos el efecto del caso particular $\{x \to x - c\}$, donde c es una constante real.

Departamento de Matemática, UTFSM
e–mail: eduardo.saez@usm.cl.

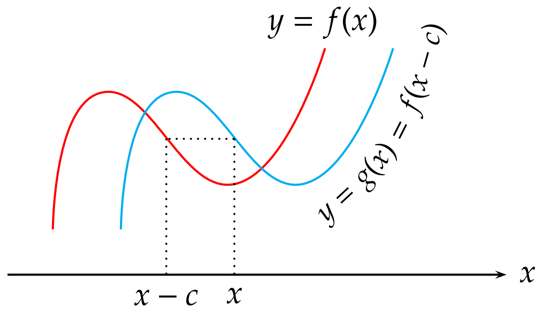

Fig. 1

La gráfica de la función f se traslada en la dirección positiva (resp. negativa) del eje x si $c > 0$ (resp. $c < 0$). La Fig. 1 ilustra este comentario en el caso $c > 0$

Reemplazando en (1) las traslaciones (2) se obtiene:

$$a(x-h)^2 + b(x-h)(y-k) + c(y-k)^2 + d(x-h) + e(y-k) + f = 0$$

La ecuacion anterior es de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + coef(x)x + coef(y)y + F = 0 \tag{3}$$

donde $coef(x), coef(y)$ y F designan los nuevos coeficientes de los términos lineales y el nuevo término constante. Los coeficientes de los términos cuadráticos permanecen invariantes. Explícitamente los coeficientes de los términos lineales están dados por:

$$\left|\begin{array}{rcl} coef(x) & = & -2ah - bk + d \\ coef(y) & = & -2ck - bh + e \end{array}\right. \quad . \text{ El sistema es lineal en } h, k. \tag{4}$$

Eligiendo valores adecuados de los parámetros h, k, por ejemplo que anulen los coeficientes de los términos lineales ($coef(x) = 0, coef(y) = 0$), si existen, es posible simplificar la expresión (3). En consecuecia por simple traslaciones, manteniendo el sistema de coordenadas, se puede trasladar la gráfica de la ecuación , a otra posición en el plano de tal suerte que la ecuación analítica correspondiente no contenga término lineales. Con este objetivo podemos estudiar si el siguiente sistema es consistente.

$$\left|\begin{array}{rcl} 2ah + bk & = & d \\ bh + 2ck & = & e \end{array}\right. \tag{5}$$

Se sabe que la consistencia del sistema depende del determinante de los coeficientes de los parámetros h, k.

$$\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2 \tag{6}$$

Se presentan varios casos:

i) Caso 1. Si $b^2-4ac \neq 0$, el sistema es consistente y admite la única solución:

$$h = \frac{2dc-be}{b^2-4ac} \quad , \quad k = \frac{2ac-bd}{b^2-4ac}$$

En consecuencia las traslaciones, al reemplazar en la ecuación (3):
$\left\{x \to x - \dfrac{2dc-be}{b^2-4ac} \ , \ y \to y - \dfrac{2ac-bd}{b^2-4ac}\right\}$

Producen dos efectos: $\begin{cases} i) & \text{Eliminan los términos lineales de la ecuación} \\ ii) & \text{Geométricamente trasladan la gráfica de la} \\ & \text{ecuación, horizontalmente y verticalmente} \\ & \text{a una nueva posición} \end{cases}$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que se ha efectuado la traslación anterior, entonces la ecuación (3) se reduce a la expresión sin términos lineales

$$ax^2 + bxy + cy^2 + F = 0 \tag{7}$$

ii) Caso 2. Si $b^2 - 4ac = 0$, multiplicando la primera ecuación del sistema (5) por b , la segunda ecuación por $2a$ y restando ambas ecuaciones se tiene:

$$(2ab - 2ab)h = bd - 2ae$$

Si $bd-2ae \neq 0$, el sistema (5) es inconsistente y en consecuencia no es posible eliminar por traslaciones ambos términos lineales simultáneamente. En este caso sólo es posible eliminar un término lineal. La ecuación (3) sin pérdida de generalidad es de la forma:

$$\begin{array}{|ll} ax^2 + bxy + cy^2 + coef(y)y + F &= 0 \quad , \text{ o bien,} \\ ax^2 + bxy + cy^2 + coef(x)x + F &= 0 \\ \hline \end{array}$$

Si $bd - 2ae = 0$, las dos ecuaciones del sistema (5) son dependientes y existen infinitas soluciones tales que las respectivas traslaciones eliminan ambos términos lineales. Entonces sin pérdida de generalidad la ecuación (3) es de la forma (7).

Definición: La expresión $\Delta = b^2-4ac$ se llama Discriminante de la ecuación (1).

Teorema 1. *El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es invariante por traslaciones.*

Demostración Teorema 1. : Las traslaciones (2), trasladan la ecuación (1) en la ecuación (3) como se demuestra más arriba y no alteran los coeficientes de los términos de segundo grado. $\square$

ROTACIONES

Consideremos la familia de rectas $y = mx$ donde las pendientes $m \in \mathbb{R}$ en el plano Cartesiano xy.

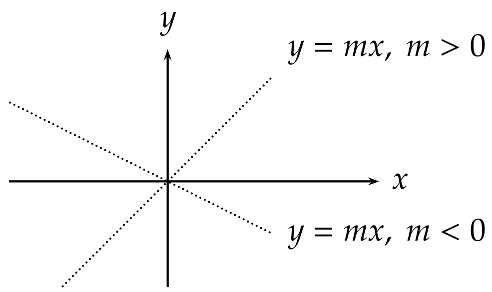

Fig. 2

Reemplacemos las transformaciones

(8) $$\{x \to Ax - By, y \to Bx + Ay\} \ , \ A^2 + B^2 > 0$$

en la ecuación de las rectas $y = mx$ (Fig. 2). Entonces se tiene:

$Bx + Ay = m(Ax - By)$, de donde, $(A + mB)y = (mA - B)x$.

Si $A + mB \neq 0$ la ecuación anterior define implícitamente $y = \dfrac{mA - B}{A + mB}x$

Sea $M = \dfrac{mA - B}{A + mB} \in \mathbb{R}$, entonces la transformaciones (8) llevan la recta $y = mx$ en la recta $y = Mx$. Este resultado significa que las transformaciones (8) produce al menos un efecto de Rotación en el plano Cartesiano.

Teorema 2. *El signo del discriminante de la cuadrática (1) es invariante bajo el efecto de una rotación.*

Demostración Teorema 2. Reemplazando las rotaciones (8) en la ecuación (1) se tiene:

$$a(Ax - By)^2 + b(Ax - By)(Bx + Ay) + c(Bx + Ay)^2 + T.O.I = 0$$

donde T.O.I significa términos de orden inferior (lineales o constantes). Reordenado la expresión anterior se obtiene:

$$\Big[aA^2 + bAB + cB^2\Big]x^2 + \Big[-2aAB + bA^2 - bB^2 + 2cAB\Big]xy + \Big[aB^2 - bAB + cA^2\Big]y^2 + T.O.I = 0$$

Sean los nuevos coeficientes de los términos cuadráticos de la ecuación rotada anterior:

(9) $$\begin{cases} \tilde{A} &= aA^2 + bAB + cB^2 \\ \tilde{B} &= 2AB(c - a) + b(A^2 - B^2) \\ \tilde{C} &= aB^2 - bAB + cA^2 \end{cases}$$

Es simple verificar la identidad, $\tilde{B}^2 - 4\tilde{A}\tilde{C} \equiv (a^2 + b^2)(B^2 - 4AC)$. Entonces $sgn(\tilde{B}^2 - 4\tilde{A}\tilde{C}) = sgn(B^2 - 4AC)$ lo que demuestra el teorema. □

Una pregunta interesante:

¿ Cómo conseguir una rotación, si existe, de tal suerte que la ecuación rotada no contenga el término mixto ?.

Conceptualmente eliminar el término mixto en la ecuación (1) se reduce a encontrar una rotación, de tal suerte, que los parámetros que definen las rotaciones tengan la propiedad de anular el coeficiente mixto de la ecuación rotada.

Pero el coeficiente del término mixto de la ecuación rotada es $\tilde{B}$ que se puede escribir como una ecuación de segundo grado en A pues
$coef(xy) = A^2b - 2AB(c - a) - B^2b = 0$

El discriminante está dado por $\Delta = 4B^2(c - a)^2 + 4b^2B^2 \geq 0$

Supongamos que el coeficiente del término mixto de la ecuación (1) es nonulo, es decir $b \neq 0$. Entonces la expresión de Δ anterior demuestra que existen rotaciones adecuadas, por ejemplo, basta tomando $B = 1$ para conseguir $\Delta > 0$. En consecuencia la ecuación $coef(x, y) = 0$ admite soluciones reales y es posible eliminar el término mixto. Es decir se ha demostrado:

Teorema 3. *En toda ecuación de segundo grado a dos variables , es posible por simples rotaciones eliminar el término mixto.*

Ejercicio Interesante Consideremos en el plano cartesiano la circunferencia de radio $r > 0$, centrada en el origen del sistema de coordenadas : $x^2 + y^2 = r^2$. Investigemos que ocurre si se aplica la rotación (8), entonces reemplazando en la ecuación de la circunferencia se tiene:

$$(Ax - By)^2 + (Bx + Ay)^2 = r^2$$

Reordenado los términos podemos escribir: $(A^2 + B^2)x^2 + (A^2 + B^2)y^2 = r^2$

Es decir, $x^2 + y^2 = R^2$ donde $R = \dfrac{r}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Lo anterior demuestra que la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ por la rotación (8) fué rotada a la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$. La circunferencia de radio r se dilató a la circunferencia R si $0 < \sqrt{A^2 + B^2} < 1$. Por el contrario la circunferencia de radio r sufrió una contracción a la circunferencia de radio R si $\sqrt{A^2 + B^2} > 1$.

Como conclusión tenemos que una rotación del tipo (8), produce además de un giro , una dilatación o contracción dependiendo si $\sqrt{A^2 + B^2} < 1(resp. > 1)$. En particular si $r = R$, es decir $\sqrt{A^2 + B^2} = 1$, los tamaños son preservados y sólo se tiene rotación.

En particular la transformación $\{x \to x \cos\theta - y \operatorname{sen}\theta, y \to x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta\}$ sólo produce efecto de rotación.

El siguiente diagrama en el plano de los parámetros AB muestra los efectos de (8) en los cambios de tamaños.

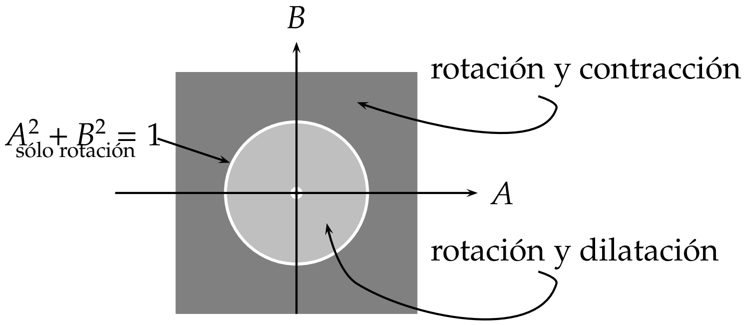

Fig. 3

Ejercicio. Demostrar que existe una rotación tal que la recta $ax + by = 0$, con a, b no simultáneamente nulos, coincide con un eje del sistema de coordenadas.

Solución: Si uno de los coeficientes a, b es nulo, entonces el ejercicio es inmediato.

Supondremos en lo que continua que $a, b \neq 0$. Sea la rotación (8) y reemplazando en la ecuación de la recta se tiene:

$$a(Ax - By) + b(Bx + Ay) = 0$$

Reordenando los términos se tiene: $(aA + bB)x + (bA - aB)y = 0$.

Pero el sistema homogeneo: $\begin{array}{rcl|} aA + bB & = & 0 \\ bA - aB & = & 0 \\ \hline \end{array}$, en las incógnitas A, B tiene sólo el origen como solución pues el discriminante $a^2 + b^2 > 0$.

Con el objeto de anular un coeficiente de la ecuación rotada, consideremos por ejemplo el coeficiente $bA - aB = 0$, o bien, $\frac{b}{a} = \frac{B}{A}$. Entonces eligiendo A, B tales que se satisfaga la proporcionalidad, el coeficiente de la variable x no se puede anular por la propiedad que el sistema sólo se satisface en el origen. La ecuación de la recta es entonces de la forma $x = 0$, lo que demuestra el ejercicio. Análogamente se puede considerar $aA + bB = 0$.

Comentario. Nótese que la idea anterior permite encontrar una rotación adecuada, sin necesidad de calcular el ángulo de rotación, que en general requiere el uso de la trigonometría.

Aplicación al estudio de las cónicas

Sea (1), la ecuación de segundo grado general en dos variables (cuadrática). El discriminante está dado por: $\Delta = b^2 - 4ac$ y por los teoremas 1, 2 el $Sign(\Delta)$ es invariante. Se presentan varios casos:

Caso I.- Si $\Delta \neq 0$, por (6) caso 1, existe una traslación adecuada tal que la cuadrática no tiene términos lineales y es de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + F = 0$$

Si $b \neq 0$, por Teorema 3, existe una rotación adecuada tal que la ecuación anterior se reduce a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + G = 0 \tag{10}$$

Pero $Sign(\Delta) = Sign(-4AC) \neq 0$, de donde $A, C \neq 0$.

Si $G = 0$, la ecuación rotada se reduce a la forma $Ax^2 + Cy^2 = 0$. Si $sgn(A) = sgn(C)$, la gráfica de la ecuación es sólo el origen y es el producto de dos rectas que se intersectan en el origen si $sgn(A) \neq sgn(C)$.

Si $G \neq 0$, la ecuación (10) dependiendo de los signos de las constantes, se puede escribir en tres formas diferentes:

$$\begin{cases} 1) \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde} \quad a^2 = \dfrac{-G}{A} > 0 \quad , \quad b^2 = \dfrac{-G}{C} > 0 \\ 2) \quad \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde} \quad a^2 = \dfrac{-G}{A} > 0 \quad , \quad b^2 = \dfrac{G}{C} > 0 \\ 3) \quad -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde} \quad a^2 = \dfrac{G}{A} > 0 \quad , \quad b^2 = \dfrac{-G}{C} > 0 \end{cases}$$

Sin pérdida de generalidad podemos supone que $a, b > 0$, entonces:

Caso 1. **[Elipse]** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}, \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq a^2, y^2 \leq b^2 \Rightarrow |x| \leq |a|, |y| \leq |b|$
Geométricamente, este cálculo se interpreta que sólo existe gráfica de la ecuación en el rectángulo $|x| \leq |a|, |y| \leq |b|$. Además, la intersección de la recta $x = a$ con la ecuación 1), es $\dfrac{y^2}{b^2} = 0$, es decir, $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ con multiplicidad dos. La multiplicidad dos, geométricamente se interpreta como un contacto cuadrático entre la recta $x = a$ y la grafica de $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
Análogamente son los contactos de los otros tres lados con los lados del rectágulo de existencia de gráfica de la ecuación 1). Es inmediato que la gráfica de 1), tiene simetría central, ver Fig 4.

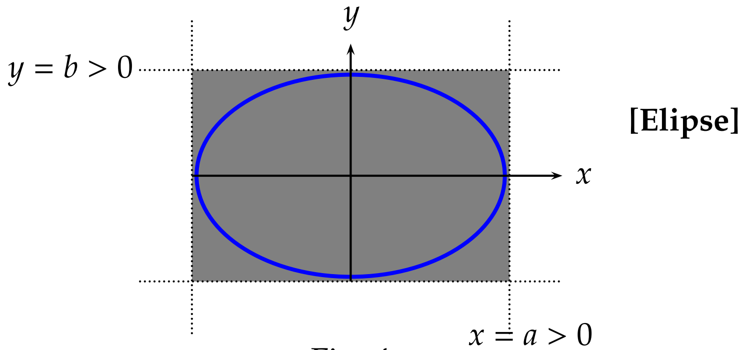

Fig. 4

Caso 2. **[Hipérbola]** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$

Busquemos intersecciones de la cuadrática con las rectas por el origen, $y = mx$, de pendientes $m \in \mathbb{R}$. El problema se reduce a resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} & = & 1 \\ y & = & mx \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{m^2x^2}{b^2} = 1 \ \Rightarrow b^2x^2 - m^2a^2x^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$(b^2 - m^2a^2)x^2 = a^2b^2$.

Pero $a^2b^2 > 0 \Rightarrow (b^2 - m^2a^2)x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$, $b^2 - m^2a^2 > 0 \Rightarrow b^2 > a^2m^2 \Rightarrow \dfrac{b^2}{a^2} > m^2 \Rightarrow \dfrac{b}{a} > |m|$

La última inecuación significa que no existe gráfica de la cónica en el sector $\dfrac{b}{a} \leq |m|$ (parte oscura de la Fig. 5)

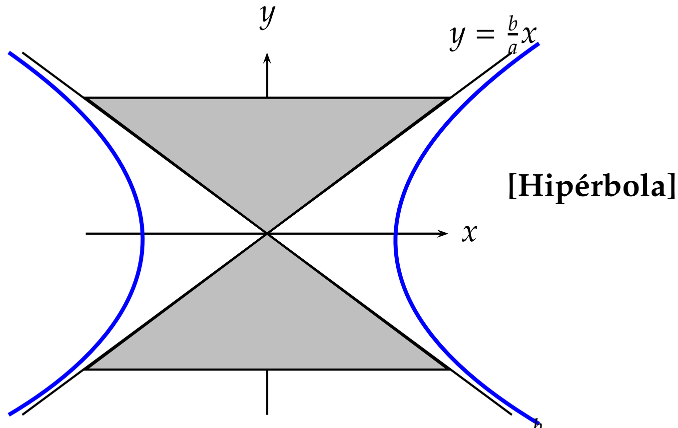

Fig. 5

Comentario: La ecuación de la hipérbola se puede factorizar:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow (\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 1 \tag{11}$$

Si en lugar del segundo miembro se reemplaza la constante **uno** por **cero** se tiene:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b} &= 0 \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} &= 0 \end{cases}$$

Las dos rectas $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$ se llaman **Asíntotas de la Hipérbola.** (Ver Fig. 5)

Nótese que la gráfica de la hipérbola, geométricamente, es una deformación continua hacia el sector donde existe gráfica, izquierda y derecha de los semiconos horizontales que forman las asíntotas: $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$

Caso 3. **[Hipérbola]** $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ a,b>0$

Análogamente al [caso 2]. Busquemos intersecciones de la cuadrática con las rectas por el origen, $y=mx$, de pendientes $m\in\mathbb{R}$. El problema se reduce a resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} &=& 1 \\ y &=& mx \end{array}\right| \Rightarrow -\frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2}{b^2}=1 \ \Rightarrow -b^2x^2+m^2a^2x^2=a^2b^2 \Rightarrow$$

$(-b^2+m^2a^2)x^2=a^2b^2$.

Pero $a^2b^2>0 \Rightarrow (-b^2+m^2a^2)x^2>0 \Rightarrow x\neq 0\ ,\ -b^2+m^2a^2>0 \Rightarrow b^2<a^2m^2 \Rightarrow \frac{b^2}{a^2}<m^2 \Rightarrow \frac{b}{a}<|m|$

La última inecuación significa que no existe gráfica de la cónica en el sector $\frac{b}{a}\geq|m|$ (parte oscura de la Fig. 6)

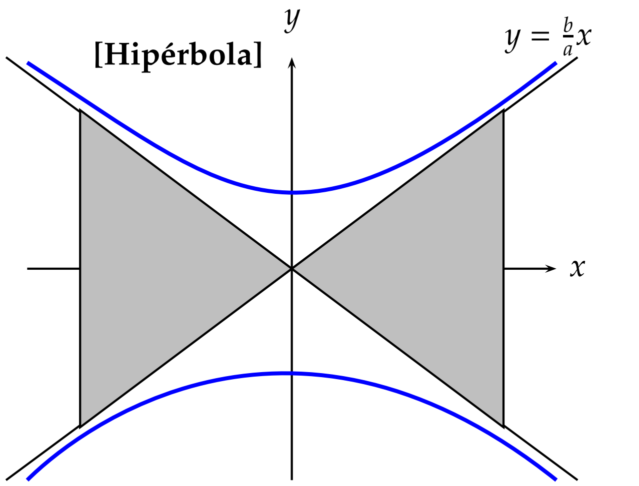

Fig. 6

Comentario: La ecuación de la hipérbola se puede factorizar:

(12) $$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow (\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(-\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=1$$

Si en lugar del segundo miembro se reemplaza la constante **uno** por **cero** se tiene:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow (\frac{x}{a}+\frac{y}{b})(-\frac{x}{a}+\frac{y}{b})=0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= 0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b} &= 0 \end{cases}$$

Las dos rectas $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$ se llaman **Asíntotas** de la Hipérbola. (Ver Fig. 6)

Nótese que la gráfica de la hipérbola, geométricamente, es una deformación continua hacia el sector donde existe gráfica, sobre y bajo los semiconos verticales que forman las asíntotas: $y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$

- Caso II.- Sea $\Delta=b^2-4ac=0$. Recordemos que en este caso no existe una traslación adecuada que elimine ambos términos lineales. Es posible eliminar sólo un término lineal, (7) caso ii). La cuadrática trasladada es de la forma y sin pérdida de generalidad

(13) $$\boxed{\begin{array}{rcl} ax^2+bxy+cy^2+Dx+F &=& 0 \\ ax^2+bxy+cy^2+Ey+F &=& 0 \end{array}}$$

Si $b\neq 0$, o bien, $b=0$, en ambos casos la cuadrática rotada se puede escribir:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} Ax^2+Cy^2+Gy+F &=& 0 \\ Ax^2+Cy^2+Hx+F &=& 0 \end{array}}$$

Por Teoremas (1), (2): $b^2-4ac=0 \Rightarrow -4AC=0 \Rightarrow \begin{cases} A &= 0 \\ C &= 0 \end{cases}$, o bien

La cuadrática se reduce:

$$A=0 \Rightarrow \begin{cases} Cy^2+Gy+F &= 0\,, \\ Cy^2+Hx+F &= 0 \end{cases}$$ a lo más dos rectas paralelas horizontales

$$C=0 \Rightarrow \begin{cases} Ax^2+Gy+F &= 0 \\ Ax^2+Hx+F &= 0\,, \end{cases}$$ a lo más dos rectas paralelas verticales

Caso $C=0$ Supongamos que la cuadrática no es un producto de rectas y es el caso de la forma $Ax^2+Gy+F=0$.

¿ Es posible además, eliminar el término constante F ?.

Consideremos la traslación vertical, $y \to y + k$. Entonces la cuadrática anterior se reduce a la expresión $Ax^2 + G(y + k) + F = 0$, de donde $Ax^2 + Gy + Gk + F = 0$

Como $G \neq 0$, la constante $k = -\dfrac{F}{G}$ anula el término constante de la cuadrática trasladada. La expresión se reduce a la forma más simple $Ax^2 + Gy = 0$, o bien a la expresión:

$$\mathbf{x^2 = py}\ , \quad \text{donde} \quad \mathbf{p} = -\frac{\mathbf{G}}{\mathbf{A}}$$

¿ Bozquejo de la gráfica ?,

$x^2 \geq 0 \Rightarrow py \geq 0$. Entonces se presentan tres casos: $\begin{cases} p > 0 & \Rightarrow & y \geq 0 \\ p < 0 & \Rightarrow & y \leq 0 \\ p = 0 & \Rightarrow & y \in \mathbb{R} \end{cases}$

El diagrama siguiente dependiendo del signo de p, muestra los tres casos posibles:

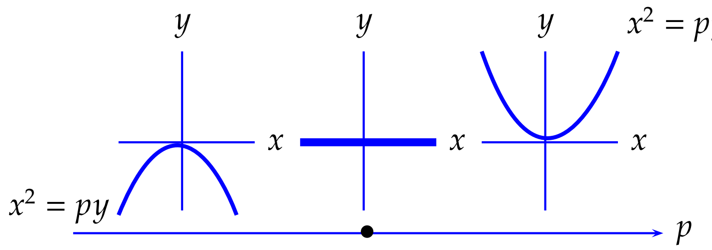

Fig. 7

Caso $A = 0$ Supongamos que la cuadrática no es un producto de rectas y es el caso de la forma $Cy^2 + Hx + F = 0$. Análogamente al caso anterior:
¿ Es posible además, eliminar el término constante F ?.
Consideremos la traslación horizontal, $x \to x+k$. Entonces la cuadrática anterior se reduce a la expresión $Cy^2 + H(x + k) + F = 0$, de donde $Cy^2 + Hx + Hk + F = 0$

Como $H \neq 0$, la constante $k = -\dfrac{F}{H}$ anula el término constante de la cuadrática trasladada. La expresión se reduce a la forma más simple $Cy^2 + Hx = 0$, o bien a la expresión:

$$\mathbf{y^2 = px}\ , \quad \text{donde} \quad \mathbf{p} = -\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{C}}$$

¿ Bozquejo de la gráfica ?,

$y^2 \geq 0 \Rightarrow px \geq 0$. Entoces se presentan tres casos: $\begin{cases} p > 0 & \Rightarrow & x \geq 0 \\ p < 0 & \Rightarrow & x \leq 0 \\ p = 0 & \Rightarrow & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

El diagrama siguiente dependiendo del signo de p, muestra los tres casos posibles:

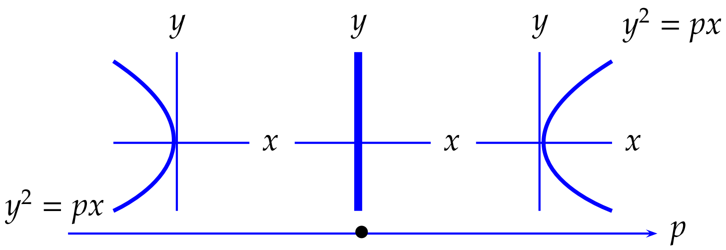

Fig. 8

Consideremos la parábola a dos parámetros:

$$y = x^2 + bx + c \quad , \quad \text{con discriminante} \quad \Delta = b^2 - 4c$$

Recordemos que si α, β son las raices de la Ecuación de Segundo grado, entonces $\alpha\beta = c, \alpha + \beta = -b$. Las raices son reales, reales con multiplicidad dos o no reales (complejas) dependiendo del signo de Δ. El diagrama cualitativo siguiente, muestra las posiciones de la parábola respecto del sistema de coordenadas, dependiendo de los valores de los dos parámetros:

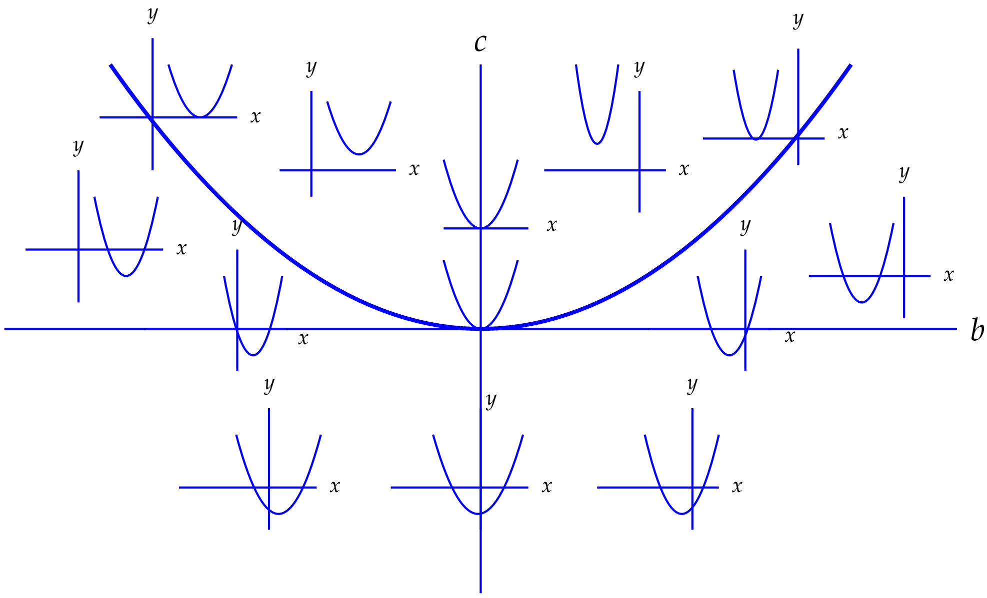

Fig. 9

Tarea: Se deja al lector como ejercicio, que haga el bosquejo del diagrama cualitativo de las posiciones de la parábola $y = -x^2 + bx + c$.