

# CANTIDADES DE LIAPUNOV

[eduardo.saez@usm.cl](mailto:eduardo.saez@usm.cl)

USM

Departamento de Matemática

# Campo de Vectores

- Supongamos un Campo de Vectores, con suficiente diferenciabilidad, definido por un sistema de E.D.O. polinomial de la forma:

$$X : \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y + p_2(x, y) + \dots + p_n(x, y) + \dots \\ \dot{y} = x - \lambda y + q_2(x, y) + \dots + q_n(x, y) + \dots \end{cases} \quad (1)$$

$p_n, q_n \in \mathbb{R}[x, y]$ , polinomios homogéneos de grado  $n > 1$

# Campo de Vectores

- Supongamos un Campo de Vectores, con suficiente diferenciabilidad, definido por un sistema de E.D.O. polinomial de la forma:

$$X : \begin{cases} \dot{x} = \lambda x - y + p_2(x, y) + \dots + p_n(x, y) + \dots \\ \dot{y} = x - \lambda y + q_2(x, y) + \dots + q_n(x, y) + \dots \end{cases} \quad (1)$$

$p_n, q_n \in \mathbb{R}[x, y]$ , polinomios homogéneos de grado  $n > 1$

- $$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

# Singularidad Monodrómica

---

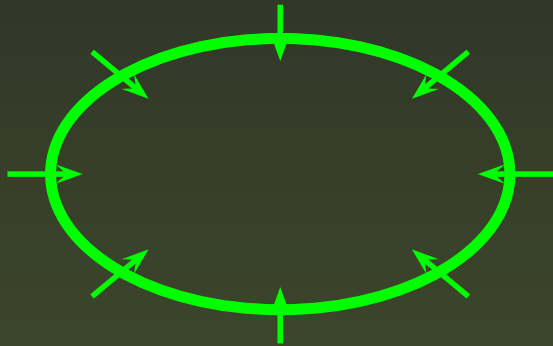
- La singularidad en el origen, es Monodrómica ssi  $\lambda \neq 0$ . En caso contrario, el campo de vectores tiene en el origen un foco hiperbólico (Atractor si  $\lambda < 0$ , Repulsor si  $\lambda > 0$ ).

# Singularidad Monodrómica

- La singularidad en el origen, es Monodrómica ssi  $\lambda \neq 0$ . En caso contrario, el campo de vectores tiene en el origen un foco hiperbólico (Atractor si  $\lambda < 0$ , Repulsor si  $\lambda > 0$ ).
- La idea para calcular las cantidades de Liapunov es conseguir una función  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Donde  $\Omega$  es una vecindad suficientemente pequeña del origen en el plano  $\mathbb{R}^2$ , tal que el campo de vectores sea **TRANSVERSAL** a curvas de nivel cerradas  $V^{-1}(c) \subset \Omega, c \in \mathbb{R}$ .

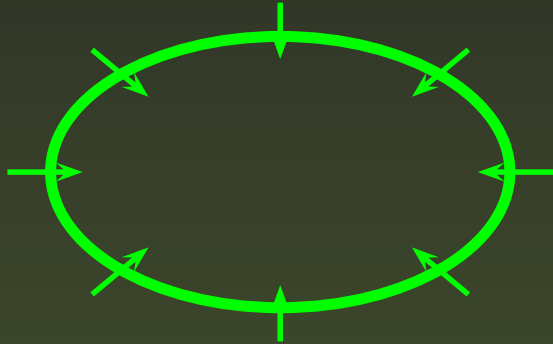
# Idea Geométrica

---



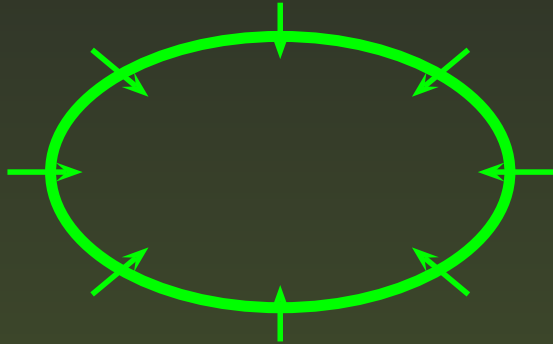
# Idea Geométrica

---



- **Idea Analítica** . Preguntarse por una función, con suficiente diferenciabilidad , tal que tenga un mínimo local en el origen.

# Idea Geométrica



- **Idea Analítica** . Preguntarse por una función, con suficiente diferenciabilidad , tal que tenga un mínimo local en el origen.
- Para cumplir con la condición de transversalidad del campo de vectores es suficiente

$$\langle \nabla V, X \rangle \neq 0$$



# Más exactamente

---

- Sea la función de la forma

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + \dots + V_n(x, y) + \dots,$$

donde ,  $V_n$  son polinomios homogéneos de grado  $n$ .

# Más exactamente

---

- Sea la función de la forma

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + \dots + V_n(x, y) + \dots,$$

donde ,  $V_n$  son polinomios homogéneos de grado  $n$ .

- Nótese que  $V$  tiene claramente un mínimo local en el origen.

# Más exactamente

- Sea la función de la forma

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + V_3(x, y) + \dots + V_n(x, y) + \dots,$$

donde ,  $V_n$  son polinomios homogéneos de grado  $n$ .

- Nótese que  $V$  tiene claramente un mínimo local en el origen.
- Busquemos, si existen, coeficientes  $\eta_n$  en términos de los parámetros del campo de vectores tales que

$$\langle \nabla V, X \rangle \equiv \eta_1(x^2 + y^2) + \eta_2(x^2 + y^2)^2 + \dots + \eta_n(x^2 + y^2)^n + \dots$$

(2)

# Valores focales

---

- Los coeficientes  $\eta_m$ , se llaman **Valores Focales**.

# Valores focales

---

- Los coeficientes  $\eta_n$ , se llaman **Valores Focales**.
- **Importante** Si el campo de vectores es polinomial (analítico), con coeficientes polinomiales en término de parámetros del campo. Por la identidad anterior, los valores focales son polinomios en términos de los parámetros y generan un anillo de polinomios de los parámetros.

# Valores focales

- Los coeficientes  $\eta_n$ , se llaman **Valores Focales**.
- **Importante** Si el campo de vectores es polinomial (analítico), con coeficientes polinomiales en término de parámetros del campo. Por la identidad anterior, los valores focales son polinomios en términos de los parámetros y generan un anillo de polinomios de los parámetros.
- Sea  $B = \{L(j) | j = 0, 1, \dots\}$  una base de generadores independientes del anillo de valores focales  $\langle \eta_1, \dots, \eta_n, \dots \rangle$ , entonces

$$\langle \eta_1, \dots, \eta_n, \dots \rangle = \langle L(0), L(1), \dots \rangle$$

# Cantidades de Liapunov

---

- Los generadores  $L(j), j = 0, 1, \dots$  se llaman Cantidades de Liapunov

# Cantidades de Liapunov

---

- Los generadores  $L(j), j = 0, 1, \dots$  se llaman **Cantidades de Liapunov**
- **Def.** La singularidad en el origen de (1), se llama **Foco Débil (Fino) de orden  $k > 0$** , ssi  $L(j) = 0, j = 0, 1, \dots, k - 1$  y  $L(k) \neq 0$ .



# Cantidades de Liapunov

- Los generadores  $L(j), j = 0, 1, \dots$  se llaman **Cantidades de Liapunov**
- **Def.** La singularidad en el origen de (1), se llama **Foco Débil (Fino) de orden  $k > 0$** , ssi  $L(j) = 0, j = 0, 1, \dots, k - 1$  y  $L(k) \neq 0$ .
- Por la identidad (2), los coeficientes de las potencias  $x^i y^j$ , del primer miembro de la identidad coinciden con los respectivos coeficientes del segundo miembro de la identidad.

# Idea de cálculo de $\eta$ 's

- Explícitamente la identidad (2) se puede escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + \frac{\partial V_3}{\partial x} + \dots)(\lambda x - y + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots) + \\ (y + \frac{\partial V_3}{\partial y} + \dots)(x + \lambda y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots) \\ \equiv \eta_1(x^2 + y^2) + \eta_2(x^2 + y^2)^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

# Idea de cálculo de $\eta$ 's

- Explícitamente la identidad (2) se puede escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + \frac{\partial V_3}{\partial x} + \dots)(\lambda x - y + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots) + \\ (y + \frac{\partial V_3}{\partial y} + \dots)(x + \lambda y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots) \\ \equiv \eta_1(x^2 + y^2) + \eta_2(x^2 + y^2)^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

- Por la identidad anterior, como  $\eta_1$  es el coeficiente de  $x^2 + y^2$  en el segundo miembro de la identidad, basta tomar para su cálculo, el 2-jet del primer miembro de la identidad, entonces

# Idea de cálculo de $\eta$ 's

- Explícitamente la identidad (2) se puede escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + \frac{\partial V_3}{\partial x} + \dots)(\lambda x - y + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots) + \\ (y + \frac{\partial V_3}{\partial y} + \dots)(x + \lambda y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots) \\ \equiv \eta_1(x^2 + y^2) + \eta_2(x^2 + y^2)^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

- Por la identidad anterior, como  $\eta_1$  es el coeficiente de  $x^2 + y^2$  en el segundo miembro de la identidad, basta tomar para su cálculo, el 2-jet del primer miembro de la identidad, entonces
- $\lambda x^2 - xy + xy + \lambda y^2 \equiv \eta_1(x^2 + y^2)$

# Idea de cálculo de $\eta$ 's

- Explícitamente la identidad (2) se puede escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + \frac{\partial V_3}{\partial x} + \dots)(\lambda x - y + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots) + \\ (y + \frac{\partial V_3}{\partial y} + \dots)(x + \lambda y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots) \\ \equiv \eta_1(x^2 + y^2) + \eta_2(x^2 + y^2)^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

- Por la identidad anterior, como  $\eta_1$  es el coeficiente de  $x^2 + y^2$  en el segundo miembro de la identidad, basta tomar para su cálculo, el 2-jet del primer miembro de la identidad, entonces

- $\lambda x^2 - xy + xy + \lambda y^2 \equiv \eta_1(x^2 + y^2)$

- Igualando coeficientes :  $\eta_1 = \lambda$ , es decir,  $\eta_1$  es la parte real del valor propio  $\lambda + i$

# Idea de cálculo de $\eta$ 's

- Explícitamente la identidad (2) se puede escribir

$$\left\{ \begin{array}{l} (x + \frac{\partial V_3}{\partial x} + \dots)(\lambda x - y + p_2(x, y) + p_3(x, y) + \dots) + \\ (y + \frac{\partial V_3}{\partial y} + \dots)(x + \lambda y + q_2(x, y) + q_3(x, y) + \dots) \\ \equiv \eta_1(x^2 + y^2) + \eta_2(x^2 + y^2)^2 + \dots \end{array} \right. \quad (3)$$

- Por la identidad anterior, como  $\eta_1$  es el coeficiente de  $x^2 + y^2$  en el segundo miembro de la identidad, basta tomar para su cálculo, el 2-jet del primer miembro de la identidad, entonces
- $\lambda x^2 - xy + xy + \lambda y^2 \equiv \eta_1(x^2 + y^2)$
- Igualando coeficientes :  $\eta_1 = \lambda$ , es decir,  $\eta_1$  es la parte real del valor propio  $\lambda + i$
- Sea  $L(0) = \lambda$ , la primera cantidad de Liapunov.

# Cálculo de $\eta_2$ , con $L(0) = 0$

---

- De la identidad (3), el valor focal  $\eta_2$  depende de los coeficientes del 4-jet del primer miembro de la identidad, es decir, de los **coeficientes del 3-jet del campo de vectores**, pues el primer miembro de la identidad (3), contiene multiplicación por términos lineales.

# Cálculo de $\eta_2$ , con $L(0) = 0$

- De la identidad (3), el valor focal  $\eta_2$  depende de los coeficientes del 4-jet del primer miembro de la identidad, es decir, de los **coeficientes del 3-jet del campo de vectores**, pues el primer miembro de la identidad (3), contiene multiplicación por términos lineales.
- Los términos cúbicos del primer miembro de la identidad (3) tienen que ser nulos, pues el segundo término de la identidad (3) no contiene términos cúbicos.



# Cálculo de $\eta_2$ , con $L(0) = 0$

- De la identidad (3), el valor focal  $\eta_2$  depende de los coeficientes del 4-jet del primer miembro de la identidad, es decir, de los **coeficientes del 3-jet del campo de vectores**, pues el primer miembro de la identidad (3), contiene multiplicación por términos lineales.
- Los términos cúbicos del primer miembro de la identidad (3) tienen que ser nulos, pues el segundo término de la identidad (3) no contiene términos cúbicos.
- Bajo la hipótesis  $\lambda = 0$ , efectuando los cálculos se obtiene que los coeficientes de  $V_3(x, y)$  satisfacen el sistema:

# Anulación de Cúbicos

$$\bullet \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{30} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{20} \\ -p_{11} - q_{20} \\ -p_{02} - q_{11} \\ q_{02} \end{pmatrix}$$

# Anulación de Cúbicos

$$\begin{matrix} \blacksquare & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{30} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{20} \\ -p_{11} - q_{20} \\ -p_{02} - q_{11} \\ q_{02} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- **Sistema compatible.** Determinante de la matriz de coeficientes = 9.

# Anulación de Cúbicos

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{30} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{03} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{20} \\ -p_{11} - q_{20} \\ -p_{02} - q_{11} \\ q_{02} \end{pmatrix}$$

- **Sistema compatible.** Determinante de la matriz de coeficientes = 9.

$$\begin{cases} v_{30} = \frac{1}{3}(p_{11} + 2q_{02} + q_{20}) \\ v_{21} = -p_{20} \\ v_{12} = q_{02} \\ v_{03} = \frac{1}{3}(-p_{02} - 2p_{20} - q_{11}) \end{cases}$$

# Cálculo de $L(1)$

---

- El valor focal  $\eta_2$ , depende de los coeficientes de los términos cuárticos del primer miembro de la identidad (3), que a su vez dependen de los coeficientes del **3-jet del campo de vectores**.

# Cálculo de $L(1)$

---

- El valor focal  $\eta_2$ , depende de los coeficientes de los términos cuárticos del primer miembro de la identidad (3), que a su vez dependen de los coeficientes del **3-jet del campo de vectores**.
- Efectuando los cálculos se obtiene que los coeficientes de  $V_4(x, y)$  satisfacen el sistema:

# Cálculo de $L(1)$

- El valor focal  $\eta_2$ , depende de los coeficientes de los términos cuárticos del primer miembro de la identidad (3), que a su vez dependen de los coeficientes del **3-jet del campo de vectores**.

- Efectuando los cálculos se obtiene que los coeficientes de  $V_4(x, y)$  satisfacen el sistema:



$$\left\{ \begin{array}{l} v_{40} = (p_{03} + p_{11}^2 - 2p_{02}p_{20} - 2p_{20}^2 + p_{21} + 2q_{02}^2 - p_{02}q_{11} - 3p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{12} + 2q_{02}q_{20} + p_{11}(3q_{02} + q_{20}) + q_{30} + 4v_{04})/4 \\ v_{31} = -(p_{11}p_{20}) - p_{30} - 4p_{20}q_{02} + q_{03} - q_{02}q_{11} + (p_{12} + p_{11}p_{20} + 3p_{30} + 12p_{20}q_{02} + p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) - 3q_{03} + 5q_{02}q_{11} - 2(-2p_{20}q_{02} + q_{03} - q_{02}q_{11}) - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21})/8 \\ v_{22} = (p_{03} - 2p_{02}p_{20} + p_{11}q_{02} + 2q_{02}^2 - p_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{11} - q_{11}^2 + q_{12} + 4v_{04})/2 \\ v_{13} = (-p_{12} - p_{11}p_{20} - 3p_{30} - 12p_{20}q_{02} - p_{02}(p_{11} + 2q_{02}) + 3q_{03} - 5q_{02}q_{11} + 2(-2p_{20}q_{02} + q_{03} - q_{02}q_{11}) + 2p_{20}q_{20} + q_{11}q_{20} - q_{21})/8 \\ v_{04} = \text{arbitrario} \end{array} \right.$$

# Expresión de $L(1)$

---

- Con los coeficientes anteriores de  $V_4$  se obtiene:

$$\eta_2 = \begin{cases} (p_{12} + p_{11}p_{20} + 3p_{30} + p_{02}p_{11} + 2p_{02}q_{02} + \\ 3q_{03} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21})/8 \end{cases}$$



# Expresión de $L(1)$

---

- Con los coeficientes anteriores de  $V_4$  se obtiene:

$$\eta_2 = \begin{cases} (p_{12} + p_{11}p_{20} + 3p_{30} + p_{02}p_{11} + 2p_{02}q_{02} + \\ 3q_{03} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21})/8 \end{cases}$$

- Luego se toma  $L(1) = \eta_2$

# Expresión de $L(1)$

- Con los coeficientes anteriores de  $V_4$  se obtiene:

$$\eta_2 = \begin{cases} (p_{12} + p_{11}p_{20} + 3p_{30} + p_{02}p_{11} + 2p_{02}q_{02} + \\ 3q_{03} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21})/8 \end{cases}$$

- Luego se toma  $L(1) = \eta_2$
- Comentario: El algoritmo descrito más arriba es programable: G. Lloyd and J.M. Pearson desarrollaron un Software con REDUCE, llamado FINDETA . Como parte del proyecto de investigación interno de la USM (1995), con el apoyo computacional de J. Figueroa desarrollamos otro Software con Mathematica, llamado LIAPUNOV.

# Expresión de $L(1)$

- Con los coeficientes anteriores de  $V_4$  se obtiene:

$$\eta_2 = \left\{ \begin{array}{l} (p_{12} + p_{11}p_{20} + 3p_{30} + p_{02}p_{11} + 2p_{02}q_{02} + \\ 3q_{03} - q_{02}q_{11} - 2p_{20}q_{20} - q_{11}q_{20} + q_{21})/8 \end{array} \right.$$

- Luego se toma  $L(1) = \eta_2$
- Comentario: El algoritmo descrito más arriba es programable: G. Lloyd and J.M. Pearson desarrollaron un Software con REDUCE, llamado FINDETA . Como parte del proyecto de investigación interno de la USM (1995), con el apoyo computacional de J. Figueroa desarrollamos otro Software con Mathematica, llamado LIAPUNOV.
- Con el Software LIAPUNOV, se pueden calcular los valores focales de orden superior. Son expresiones muy extensas por ejemplo para  $\eta_3$ .

# Expresión de $\eta_3$

$$\begin{aligned}\eta_3 = & (-10p_{02}^3p_{11} + 17p_{02}p_{03}p_{11} + 12p_{04}p_{11} - 23p_{02}p_{11}^3 - 10p_{02}^2p_{12} - 3p_{03}p_{12} - 23p_{11}^2p_{12} + \\ & 20p_{02}p_{13} + 12p_{14} - 76p_{02}^2p_{11}p_{20} + 13p_{03}p_{11}p_{20} - 23p_{11}^3p_{20} - 46p_{02}p_{12}p_{20} + 28p_{13}p_{20} - \\ & 142p_{02}p_{11}p_{20}^2 - 64p_{12}p_{20}^2 - 76p_{11}p_{20}^3 - 5p_{02}p_{11}p_{21} - 9p_{12}p_{21} - p_{11}p_{20}p_{21} + 4p_{11}p_{22} - \\ & 90p_{02}^2p_{30} - 45p_{03}p_{30} - 77p_{11}^2p_{30} - 234p_{02}p_{20}p_{30} - 228p_{20}^2p_{30} - 39p_{21}p_{30} + 12p_{02}p_{31} + \\ & 36p_{20}p_{31} + 12p_{32} - 20p_{11}p_{40} + 60p_{50} - 20p_{02}^3q_{02} + 34p_{02}p_{03}q_{02} + 24p_{04}q_{02} - 159p_{02}p_{11}^2q_{02} - \\ & 105p_{11}p_{12}q_{02} - 132p_{02}^2p_{20}q_{02} + 32p_{03}p_{20}q_{02} - 109p_{11}^2p_{20}q_{02} - 192p_{02}p_{20}^2q_{02} - 24p_{20}^3q_{02} - \\ & 50p_{02}p_{21}q_{02} - 40p_{20}p_{21}q_{02} - 16p_{22}q_{02} - 287p_{11}p_{30}q_{02} - 88p_{40}q_{02} - 350p_{02}p_{11}q_{02}^2 - \\ & 148p_{12}q_{02}^2 - 144p_{11}p_{20}q_{02}^2 - 392p_{30}q_{02}^2 - 248p_{02}q_{02}^3 + 24p_{20}q_{02}^3 - 30p_{02}^2q_{03} - 9p_{03}q_{03} - \\ & 81p_{11}^2q_{03} - 178p_{02}p_{20}q_{03} - 248p_{20}^2q_{03} - 51p_{21}q_{03} - 303p_{11}q_{02}q_{03} - 372q_{02}^2q_{03} + 80p_{02}q_{04} + \\ & 88p_{20}q_{04} + 60q_{05} - 13p_{02}^2p_{11}q_{11} + 8p_{03}p_{11}q_{11} - 13p_{02}p_{12}q_{11} + 8p_{13}q_{11} - 42p_{02}p_{11}p_{20}q_{11} -\end{aligned}$$

# Continuación de $\eta_3$

$$\begin{aligned} & 17p_{12}p_{20}q_{11} - 29p_{11}p_{20}^2q_{11} - 75p_{02}p_{30}q_{11} - 87p_{20}p_{30}q_{11} - 16p_{02}^2q_{02}q_{11} + 19p_{03}q_{02}q_{11} + \\ & 27p_{11}^2q_{02}q_{11} + 28p_{02}p_{20}q_{02}q_{11} + 96p_{20}^2q_{02}q_{11} + 17p_{21}q_{02}q_{11} + 101p_{11}q_{02}^2q_{11} + 124q_{02}^3q_{11} - \\ & 59p_{02}q_{03}q_{11} - 71p_{20}q_{03}q_{11} + 20q_{04}q_{11} - 3p_{02}p_{11}q_{11}^2 - 3p_{12}q_{11}^2 - 3p_{11}p_{20}q_{11}^2 - 9p_{30}q_{11}^2 + \\ & 27p_{02}q_{02}q_{11}^2 + 37p_{20}q_{02}q_{11}^2 - 5q_{03}q_{11}^2 - q_{02}q_{11}^3 - 3p_{02}p_{11}q_{12} - 3p_{12}q_{12} - 7p_{11}p_{20}q_{12} - \\ & 21p_{30}q_{12} - 46p_{02}q_{02}q_{12} - 40p_{20}q_{02}q_{12} - 33q_{03}q_{12} + 23q_{02}q_{11}q_{12} - 36q_{02}q_{13} - 53p_{02}p_{11}^2q_{20} - \\ & 53p_{11}p_{12}q_{20} + 60p_{02}^2p_{20}q_{20} + 30p_{03}p_{20}q_{20} - 3p_{11}^2p_{20}q_{20} + 156p_{02}p_{20}^2q_{20} + 152p_{20}^3q_{20} - \\ & 8p_{02}p_{21}q_{20} + 2p_{20}p_{21}q_{20} - 8p_{22}q_{20} - 131p_{11}p_{30}q_{20} - 80p_{40}q_{20} - 232p_{02}p_{11}q_{02}q_{20} - \\ & 134p_{12}q_{02}q_{20} + 68p_{11}p_{20}q_{02}q_{20} - 322p_{30}q_{02}q_{20} - 252p_{02}q_{02}^2q_{20} + 288p_{20}q_{02}^2q_{20} - \\ & 147p_{11}q_{03}q_{20} - 378q_{02}q_{03}q_{20} + 30p_{02}^2q_{11}q_{20} + 15p_{03}q_{11}q_{20} + 27p_{11}^2q_{11}q_{20} + 136p_{02}p_{20}q_{11}q_{20} + \\ & 158p_{20}^2q_{11}q_{20} + 21p_{21}q_{11}q_{20} + 138p_{11}q_{02}q_{11}q_{20} + 238q_{02}^2q_{11}q_{20} + 29p_{02}q_{11}^2q_{20} + 39p_{20}q_{11}^2q_{20} - \end{aligned}$$

# Fin de $\eta_3$

$$\begin{aligned} & q_{11}^3 q_{20} - 8p_{02} q_{12} q_{20} - 2p_{20} q_{12} q_{20} + 19q_{11} q_{12} q_{20} - 12q_{13} q_{20} - 30p_{02} p_{11} q_{20}^2 - 30p_{12} q_{20}^2 + \\ & 64p_{11} p_{20} q_{20}^2 - 30p_{30} q_{20}^2 - 60p_{02} q_{02} q_{20}^2 + 228p_{20} q_{02} q_{20}^2 - 90q_{03} q_{20}^2 + 37p_{11} q_{11} q_{20}^2 + \\ & 124q_{02} q_{11} q_{20}^2 + 20p_{20} q_{20}^3 + 10q_{11} q_{20}^3 - 30p_{02}^2 q_{21} - 15p_{03} q_{21} - 27p_{11}^2 q_{21} - 86p_{02} p_{20} q_{21} - \\ & 100p_{20}^2 q_{21} - 21p_{21} q_{21} - 89p_{11} q_{02} q_{21} - 112q_{02}^2 q_{21} - 29p_{02} q_{11} q_{21} - 33p_{20} q_{11} q_{21} + q_{11}^2 q_{21} - \\ & 15q_{12} q_{21} - 37p_{11} q_{20} q_{21} - 94q_{02} q_{20} q_{21} - 10q_{20}^2 q_{21} + 8p_{02} q_{22} + 16p_{20} q_{22} - 4q_{11} q_{22} + 12q_{23} - \\ & 9p_{02} p_{11} q_{30} - 9p_{12} q_{30} - 5p_{11} p_{20} q_{30} - 63p_{30} q_{30} - 18p_{02} q_{02} q_{30} + 32p_{20} q_{02} q_{30} - 27q_{03} q_{30} + \\ & 8p_{11} q_{11} q_{30} + 37q_{02} q_{11} q_{30} + 82p_{20} q_{20} q_{30} + 41q_{11} q_{20} q_{30} - 21q_{21} q_{30} - 8p_{11} q_{31} - 28q_{02} q_{31} - \\ & 20q_{20} q_{31} - 24p_{20} q_{40} - 12q_{11} q_{40} + 12q_{41})/192 \end{aligned}$$

# Bifurcaciones generalizadas de Hopf

---

- El Campo de Vectores (1), tiene en el origen un Foco Débil Atractor de orden dos si  $L(0) = L(1) = 0$  y  $L(2) < 0$ .

# Bifurcaciones generalizadas de Hopf

- El Campo de Vectores (1), tiene en el origen un Foco Débil Atractor de orden dos si  $L(0) = L(1) = 0$  y  $L(2) < 0$ .
- Por el algoritmo descrito en estas notas existe,

$$J_6(V)(x, y) , \text{ tal que, } \left\langle \nabla V_6, J_5(X) \right\rangle \neq 0$$



# Bifurcaciones generalizadas de Hopf

- El Campo de Vectores (1), tiene en el origen un Foco Débil Atractor de orden dos si  $L(0) = L(1) = 0$  y  $L(2) < 0$ .

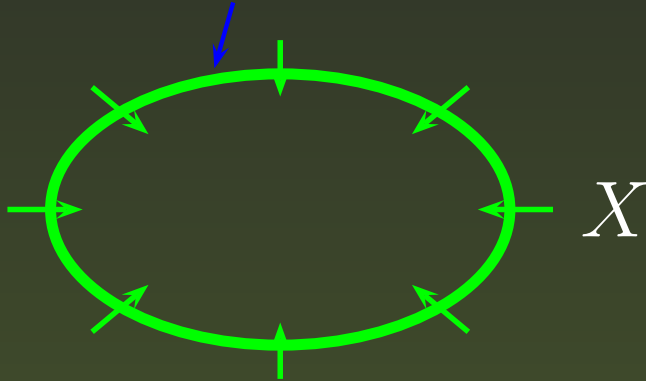
- Por el algoritmo descrito en estas notas existe,

$$J_6(V)(x, y), \quad \text{tal que,} \quad \langle \nabla V_6, J_5(X) \rangle \neq 0$$

- Geométricamente, existe una curva de nivel pequeño de  $J_6(V)$ , transversal al campo de vectores en cada punto. El sentido del campo de vectores es hacia el origen, pues  $L(2) < 0$  y el sentido del gradiente  $\nabla J_6(V)$  es el opuesto hacia el origen pues  $J_6(V)$  tiene un mínimo local en el origen.

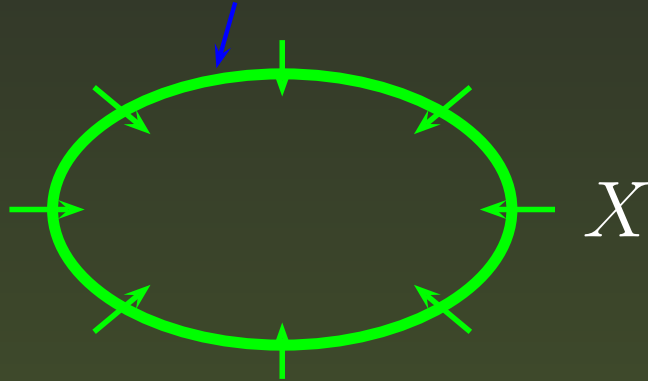
# gráfica

$J_6(V)^{-1}(c)$ ,  $c$  valor regular pequeño



# gráfica

$J_6(V)^{-1}(c)$ ,  $c$  valor regular pequeño



- 
- Sea una perturbación de los parámetros del Campo (1) que invierta la estabilidad del origen, es decir, tal que,  $L(0) = 0$  y  $L(1) > 0$ . Entonces ocurren dos cosas:

# Continuación

---

- La transversalidad ,  $\langle \nabla V_6, J_5(X) \rangle < 0$ , es persistente pues la transversalidad es estructuralmente estable.

# Continuación

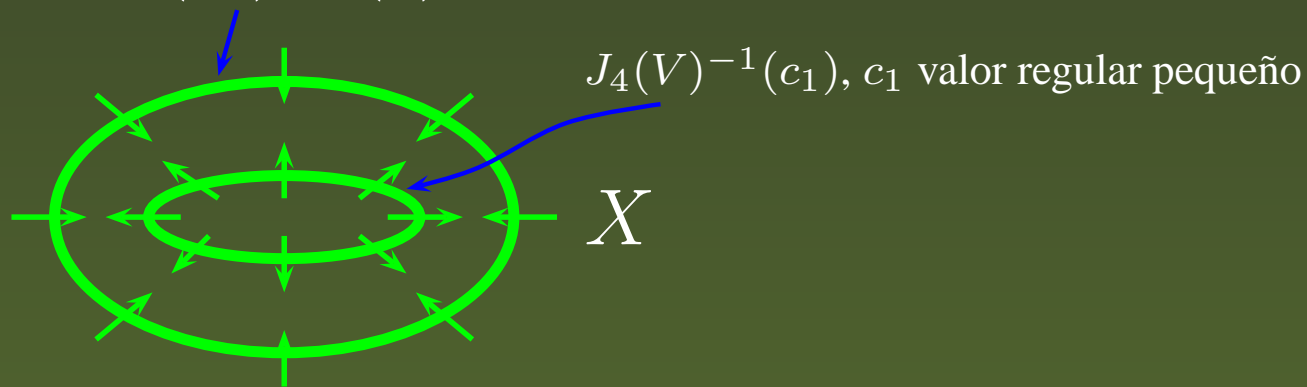
---

- La transversalidad ,  $\langle \nabla V_6, J_5(X) \rangle < 0$ , es persistente pues la transversalidad es estructuralmente estable.
- existe una curva de nivel pequeño,  $J_4(V)^{-1}(c_1)$  , tal que,  $\langle \nabla V_4, J_3(X) \rangle > 0$

# Continuación

- La transversalidad ,  $\langle \nabla V_6, J_5(X) \rangle < 0$ , es persistente pues la transversalidad es estructuralmente estable.
- existe una curva de nivel pequeño,  $J_4(V)^{-1}(c_1)$  , tal que,  $\langle \nabla V_4, J_3(X) \rangle > 0$

$J_6(V)^{-1}(c)$ ,  $c$  valor regular pequeño



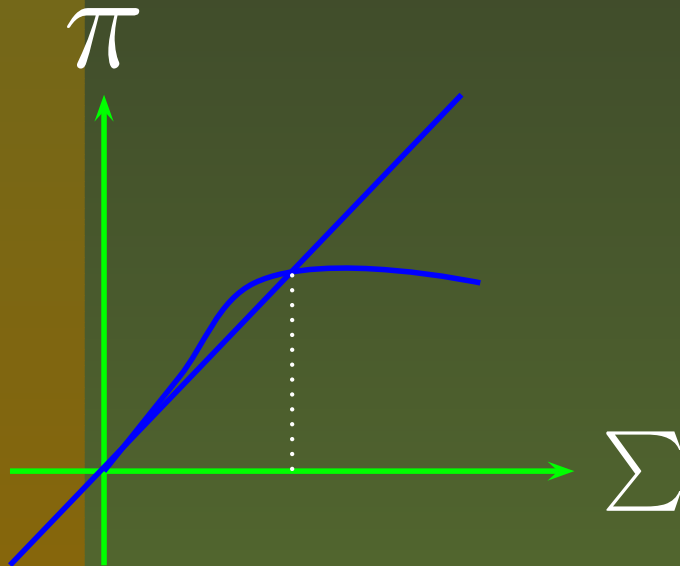
# Primer ciclo límite

---

- Por el Teorema de Poincaré-Bendixon, existe un ciclo límite infinitesimal hiperbólico atractor, entre las curvas de nivel  $J_6(V)^{-1}(c)$  y  $J_4(V)^{-1}(c_1)$ .

# Primer ciclo límite

- Por el Teorema de Poincaré-Bendixon, existe un ciclo límite infinitesimal hiperbólico atractor, entre las curvas de nivel  $J_6(V)^{-1}(c)$  y  $J_4(V)^{-1}(c_1)$ .
- La hiperbolicidad del ciclo límite es consecuencia de la transformación de primer retorno de Poincaré ya que interseca transversalmente la diagonal





# Segundo ciclo límite

---

- Sea una perturbación de los parámetros del Campo (1) que invierta nuevamente la estabilidad del origen, es decir, tal que,  $L(0) < 0$  con  $L(1) > 0$ . Entonces ocurren tres cosas:

# Segundo ciclo límite

- Sea una perturbación de los parámetros del Campo (1) que invierta nuevamente la estabilidad del origen, es decir, tal que,  $L(0) < 0$  con  $L(1) > 0$ . Entonces ocurren tres cosas:
- La transversalidad ,  $\langle \nabla V_4, J_3(X) \rangle > 0$ , es persistente pues es estructuralmente estable.

# Segundo ciclo límite

- Sea una perturbación de los parámetros del Campo (1) que invierta nuevamente la estabilidad del origen, es decir, tal que,  $L(0) < 0$  con  $L(1) > 0$ . Entonces ocurren tres cosas:
- La transversalidad,  $\langle \nabla V_4, J_3(X) \rangle > 0$ , es persistente pues es estructuralmente estable.
- El ciclo límite atractor anterior, persiste pues es hiperbólico

# Segundo ciclo límite

- Sea una perturbación de los parámetros del Campo (1) que invierta nuevamente la estabilidad del origen, es decir, tal que,  $L(0) < 0$  con  $L(1) > 0$ . Entonces ocurren tres cosas:
- La transversalidad,  $\langle \nabla V_4, J_3(X) \rangle > 0$ , es persistente pues es estructuralmente estable.
- El ciclo límite atractor anterior, persiste pues es hiperbólico
- Existe una curva de nivel pequeño,  $J_2(V)^{-1}(c_2)$ , tal que,  $\langle \nabla V_2, J_1(X) \rangle < 0$

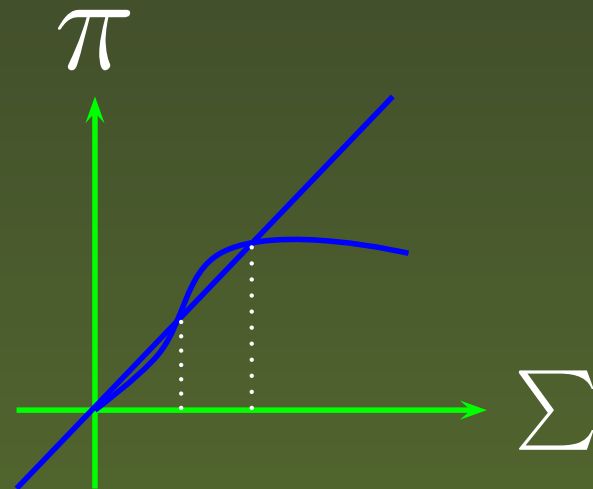
# Continuación

---

- Por el Teorema de Poincaré-Bendixon, existe un ciclo límite infinitesimal hiperbólico repulsor , entre las curvas de nivel  $J_4(V)^{-1}(c)$  y  $J_2(V)^{-1}(c_1)$ .

# Continuación

- Por el Teorema de Poincaré-Bendixon, existe un ciclo límite infinitesimal hiperbólico repulsor, entre las curvas de nivel  $J_4(V)^{-1}(c)$  y  $J_2(V)^{-1}(c_1)$ .
- La hiperbolicidad del nuevo ciclo límite es consecuencia de la transformación de primer retorno de Poincaré y es como en la figura .



# FIN

---